

Tipos de rectas. Vector director. Pendiente. Paralelas y perpendiculares.

1.- Encuentra la ecuación vectorial, paramétrica y continua de la recta que pasa por los puntos $A=(3,2)$ y $B=(1,-1)$.

$$\text{Sol: } (x,y) = (3,2) + t(2,3); \{x=3+2t; y=2+3t\}; (x-3)/2 = (y-2)/3$$

2.- ¿Cuál es la ecuación paramétrica de la recta que pasa por los puntos $P=(2,1)$ y $Q=(1,-2)$. ¿Para qué valores del parámetro se obtienen los puntos P y Q y el punto medio de P y Q ? Sol: $\{x=2+t; y=1+3t\}; t=0; t=-1; t=-1/2$

3.- a) ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A=(2,2)$ y $B=(0,4)$?
b) Escribe las ecuaciones explícita e implícita de la recta que pasa por los puntos $P=(1,4)$ y $Q=(2,3)$.

$$\text{Sol: a) } m = -1; \text{ b) } y = -x + 5; x + y - 5 = 0.$$

4.- Deduce la ecuación de la recta cuyos puntos de intersección con los ejes son $A=(6,0)$ y $B=(0,-2)$. Sol: $x-3y-6=0$.

5.- Escribe las ecuaciones generales de los ejes coordenados. ¿Cuál es la ecuación paramétrica de cada uno? Sol: $y=0, x=0; \{x=\tilde{e}, y=0\}; \{x=0, y=\tilde{e}\}$

6.- Escribe la ecuación explícita de la bisectriz del primer y tercer cuadrante. Escribe también la de la bisectriz del segundo y el cuarto cuadrante. Sol: $y=x; y=-x$.

7.- Escribe en formas explícita y continua la ecuación de la recta: $2x+3y=6$. Sol: $y = (-2/3)x + 2; (x-3)/3 = y/-2$.

8.- Calcula la ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por el punto P en los casos: a) $r: \{x=2-3t; y=1+t\}; P=(3,1)$; b) $r: (x-1)/2 = y/3, P=(0,5)$; c) $r: y=2x-1, P=(1,2)$; d) $r: 2x-3y+2=0, P=(0,0)$.

$$\text{Sol: a) } (x-3)/1 = (y-1)/3; \text{ b) } x/-3 = (y-5)/2; \text{ c) } (x-1)/-2 = (y-2)/1; \text{ d) } x/2 = y/-3.$$

9.- Halla la ecuación de s que es perpendicular a $r: x+y-1=0$ y pasa por el punto $A=(2,1)$. Busca las coordenadas de un punto S que equidiste de A y de r . Sol: $x-y-1=0$

10.- ¿Pertenece el punto $P=(3,3)$ a la recta que pasa por los puntos $A=(1,-1)$ y $B=(2,1)$? Sol: Sí

11.- En un espacio tridimensional, ¿cuáles son las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por los puntos $A=(0,1,0)$ y $B=(3,1,1)$?

$$\text{Sol: } \{x=0+3t; y=1; z=0+t\}$$

12.- Dada la recta $r: x+3y+2=0$, en forma implícita, escribirla en forma explícita, canónica, normal, continua y vectorial. Sol: a) $y = (-1/3)x - 2/3$; b) $(x/-2) + y/(-2/3) = 1$; c) $(x+3y+2)/\sqrt{10} = 0$; d) $(x-1)/3 = (y+1)/-1$; e) $(x,y) = (1,-1) + t(3,-1)$.

13.- Escribir en la forma normal las rectas $r: 4x + 3y - 10 = 0$ y $r': \sqrt{3}x - y + 4 = 0$. Sol: a) $(4/5)x + (3/5)y - 2 = 0$; b) $(\sqrt{3}/2)x - (1/2)y + 2 = 0$.

14.- Hallar la ecuación del haz de rectas definido por las rectas $r: x + y - 1 = 0$ y $s: 3x + y + 4 = 0$. Hallar después la recta del haz que: a) Pasa por el punto $A(1,2)$. b) Es paralela a la recta $s: x - y - 2 = 0$. c) Es perpendicular a la recta $r: x - 2y + 1 = 0$. Sol: $\hat{a}(x + y - 1) + \hat{a}(3x + y + 4) = 0$; a) $3x + 7y = 17$; b) $x - y + 6 = 0$; c) $4x + 2y + 3 = 0$.

15.- ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(0,1)$ y $B(3,4)$? Sol: $m = 1$

16.- ¿Cuál es el vector de dirección y la pendiente de las siguientes rectas?: a) $y = 3x - 2$. b) $(x-1)/2 = (y+2)/4$. Sol: a) $v = (1,3)$; $m = 3$; b) $v = (2,4)$; $m = 2$

17.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por $B(3,1)$ y es paralela a la que pasa por los puntos $A(2,0)$ y $C(2,-1)$. Sol: $y = 1$

18.- a) ¿Cómo sería la ecuación de una recta cualquiera que pasase por el punto $(2,-1)$? b) ¿Cuál de todas estas pasarían por el punto $(0,3)$? c) ¿Cuál de ellas sería paralela a la recta $x + 2y = 5$?

Sol: a) $(x-2)/v_1 = (y+1)/v_2$; b) $(x-2)/2 = (y+1)/-4$; c) $(x-2)/-2 = (y+1)/1$

19.- Escribe en forma explícita e implícita la ecuación de la recta $2x + y = 2$. Sol: $y = -2x + 2$; $2x + y - 2 = 0$

20.- Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la recta $x + y - 1 = 0$ que pasa por el punto $A(2,1)$. Sol: $x - y - 1 = 0$

21.- a) Hallar el haz de rectas que pasa por el punto $A(3,-1)$ en forma explícita; b) ¿Cuál de las rectas del haz es paralela a la recta $3x - y = 2$?; c) ¿Cuál de las rectas del haz pasa por el punto medio del segmento de extremos $A(4,-1)$, $B(0,-5)$. Sol: a) $y = m(x-3) - 1$; b) $y = 3(x-3) - 1$; c) $y = 2(x-3) - 1$

22.- Halla la ecuación de la perpendicular a la recta $x + y - 1 = 0$ por el punto de abscisa 3. Sol: $(3,-2)$; $x - y - 5 = 0$

23.- Halla la ecuación de la recta perpendicular al vector $w(2,1)$ y que corta a $y = x - 2$ en el punto de ordenada 3. Sol: $2x + y - 13 = 0$

24.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x + 3y + 1 = 0$ y $x - y - 2 = 0$, y es perpendicular a la recta $(x/5) + (y/3) = 1$. Sol: Pto corte: $(1,-1)$; $5x - 3y + 5 = 0$

25.- Dadas las rectas $r: \{x = 1 + \ddot{e}; y = 2\ddot{e}\}$ y $s: (x+1)/3 = (y-1)/1$. a) Determinar el punto de intersección de ambas y las ecuaciones de las rectas que pasando por dicho punto sean: b) paralela a $y = x - 3$; c) perpendicular a $x + y + 5 = 0$. Sol: a) $(2,2)$; b) $y = x$; c) $x - y = 0$

26.- Si te dicen que el punto $(3,k)$ pertenece a la recta $y = x + 6$. ¿Cuánto vale k ? Sol: $k = 9$

27.- Escribe la ecuación paramétrica y continua de la recta: $x + 2y = 4$.

Sol: $\{x = -2t; y = 2 + t\}$; b) $x/2 = (y-2)/1$

28.- Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,-1) que es paralela a la que pasa por los puntos (2,0) y (1,3). Sol: $3x + y - 5 = 0$

29.- Dadas las rectas siguientes, decide cuales son paralelas y cuales no: a) $\{x = 2 + t; y = -1 + 2t\}$, $\{x = 3 + t; y = 2t\}$, $\{x = t; y = t\}$; b) $x + y + 1 = 0$; $2x - y + 2 = 0$; c) $3x - y + 1 = 0$; $3x - y = 0$. Sol: a) paralelas las dos primeras; b) no son c) son paralelas

30.- ¿Cuál o cuáles de las siguientes rectas pasan por el punto (1,3)? a) $x - 2y + 2 = 0$; b) $2x + y - 5 = 0$; c) $y = 2x - 3$. Sol: a) no; b) si; c) no

31.- Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,1) y por el punto de intersección entre las rectas: r: $y = 2x + 2$; s: $(x-1)/1 = (y-3)/1$. Sol: $x + 2y - 4 = 0$

32.- ¿Pertenece el punto (0,5) a la recta determinada por el vector (1,3) y el punto (2,3)? Sol: no

33.- Halla la ecuación de la recta perpendicular a la $3x - 4y + 1 = 0$ que pasa por el punto (1,0). Sol: $4x + 3y - 4 = 0$

Segmentos. Pto Medio. Ptos de corte. Punto simétrico.

1.- Busca un punto P situado en el segmento AB, $A = (1,2)$ y $B = (4,-1)$ que lo divida en dos partes una doble de la otra. Sol: $P = (2,1)$; $P' = (3,0)$

2.- Halla los puntos de corte con los ejes coordenados de la recta: $(x+2)/2 = (y-2)/2$. Sol: (0,4) y (-4,0).

3.- Encuentra las coordenadas de un punto de $2x - y - 6 = 0$, que diste 2 unidades de $3x - 4y + 1 = 0$. Sol: (3,0), (7,8)

4.- Encuentra las coordenadas del punto simétrico de $P = (2,-1)$ respecto a la recta r: $2x + y - 3 = 0$. Sol: (0,3).

5.- Busca un punto P sobre la recta $-3x + 4y + 1 = 0$, tal que la recta que contiene a PO (O= origen de coordenadas) pase por el punto medio del segmento AB, siendo $A = (2,1)$ y $B = (1,1)$. Sol: (3,2)

6.- Las coordenadas del punto medio del segmento AB son (2,1). Calcula las coordenadas del punto A sabiendo que las coordenadas de B son (1,2). Sol: (3,0)

7.- Dados los puntos $A(3,6)$ y $B(1,0)$ y la recta r: $x - y + 1 = 0$, hallar: a) El simétrico de A respecto a B. b) El simétrico de B respecto a r. c) La ecuación de la recta s, simétrica a la AB respecto de r.

Sol: a) (-1,-6); b) (-1,2); c) $x - 3y + 7 = 0$.

8.- Hallar: a) Las coordenadas del punto P' simétrico del $P(2,1)$, respecto del

M(2,0). b) Las coordenadas del punto A', simétrico de A(-2,1) respecto de la recta t: $2x + y - 2 = 0$. c) La ecuación de la recta r', simétrica de la r: $x + 2y - 3 = 0$ respecto de la s: $x + y = 4$.

Sol: a) (2,-1); b) (0,2); c) $4x + 3y = 21$

9.- Sabiendo que A(2,4) y C(6,0). Hallar las coordenadas del punto B del modo que $CA = (1/4)CB$. Sol: (3,3)

10.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de la recta $x - 2y + 2 = 0$ con el eje X y es paralela a la recta que pasa por el punto (2,-1) y por el punto medio del segmento de extremos (0,4) y (2,-2). Sol: $2x + y + 4 = 0$

11.- Hallar las coordenadas del punto simétrico de P(-1,-1) respecto de la recta $x + 3y - 6 = 0$. Sol: (1,5)

12.- Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos A(1,2) y B(3,4) y el ángulo que forma con el eje X. Sol: $x + y - 5 = 0$

13.- Hallar las ecuaciones de las rectas paralela y perpendicular a la $2x - y + 1 = 0$, por el punto P(3,2). Ambas rectas cortan a los ejes OX y OY respectivamente en los puntos A y B. Calcúlese la mediatriz de AB. Sol: a) $2x - y - 4 = 0$; $x + 2y - 7 = 0$

14.- Ecuación de la mediatriz del segmento que determina la recta $2x + y = 4$ al cortar a los ejes de coordenadas. Sol: $x - 2y + 3 = 0$

15.- Si la recta r corta a $y = 2x$ ¿corta a las rectas $2y + m = 4x$? Razona la respuesta. Sol: Sí, son paralelas

16.- Halla el simétrico del punto (1,2) respecto a la recta $x - 2 = 0$. Sol: (3,2)

17.- Dado el segmento de extremos A(3,10) y B(5,2). Halla un punto P de este segmento de manera que la distancia PA sea tres veces PB. Sol: (9/2,4)

Mediatrices y distancias

1.- Halla la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos A= (3,4) y B= (1,2). Sol: $(x-2)/1 = (y-3)/-1$.

2.- Calcula la distancia del punto P= (1,-1) a cada una de las rectas siguientes: a) $x + 3y + 2 = 0$; b) $y = 2x - 1$; c) $(x + 1)/2 = (y - 2)/3$; d) $\{x = 1 + t; y = 2 - 4t\}$; e) $4x + 3y = 2$; f) $x/2 + y/3 = 1$.

Sol: a) 0; b) $2/\sqrt{5}$; c) $12/\sqrt{13}$; d) $3/\sqrt{17}$; e) $1/5$; f) $5/\sqrt{13}$.

3.- Calcula la distancia entre las rectas paralelas: r: $3x + 4y - 15 = 0$ y s: $3x + 4y = 40$. Sol: 5

4.- Calcula la distancia entre las rectas paralelas: a) r: $x + y - 2 = 0$; s: $x + y + 1 = 0$; b) r: $y = x - 3$; s: $x - y + 2 = 0$. Sol: a) $3/\sqrt{2}$; b) $5/\sqrt{2}$

5.- Calcula las longitudes de las tres alturas del triángulo determinado por los puntos $A=(1,1)$, $B=(1,3)$ y $C=(3,2)$. Sol: $4/\sqrt{5}$, $4/\sqrt{5}$, 2

6.- Un punto P que es equidistante de $A=(3,1)$ y de $B=(3,5)$, dista el triple del eje de abscisas que del eje de ordenadas. ¿Cuáles son sus coordenadas?. Sol: (1,3)

7.- Dados los puntos $A(1,-4)$ y $B(-2,3)$ y la recta $r: x-2y-1=0$, hallar un punto P que equidiste de A y B y sea incidente con r.
Sol: (3,1)

8.- Hallar la distancia entre las rectas $r: 12x-5y+2=0$ y $s: 12x-5y+5=0$.
Sol: 3/13

9.- Hallar un punto de la recta $r: x+y-2=0$ que equidiste de los puntos $A(1,3)$ y $B(1,1)$. Sol: (0,2)

10.- Calcular la distancia del punto $P(2,1)$ a cada una de las rectas siguientes: a) $x-y+5=0$; b) $x/2=(y-2)/1$; c) $\{x=1+2t; y=-2t\}$; d) $x/2+y/3=1$.
Sol: a) $6/\sqrt{2}$; b) $4/\sqrt{5}$; c) $\sqrt{2}$; d) $2/\sqrt{13}$

11.- Un punto P que es equidistante de $A(2,1)$ y $B(2,3)$ dista el doble del eje de abscisas que del eje de ordenadas. ¿Cuáles son sus coordenadas?. Sol: (1,2)

12.- Dada la ecuación $x-y+2=0$. Hallar la ecuación de una paralela a dicha recta a una distancia de $\frac{2}{\%}$ unidades. Sol: $x-y=0$

13.- Hallar la distancia entre las rectas paralelas: a) $x+y-3=0$; $2x+2y+1=0$. b) $(x-1)/4=(y+1)/3$; $\{x=4t; y=1+3t\}$. Sol: a) $7/8$; b) $13/5$
%

14.- Hallar las coordenadas de un punto de la recta $x-y-1=0$ que diste 1 unidad de la recta $3x-4y+2=0$. Sol: (1,0)

15.- Hallar las coordenadas de un punto P equidistante de 3 puntos dados: $A(4,4)$, $B(5,3)$ y $C(-1,3)$. Sol: $P(2,1)$

16.- Hallar las ecuaciones de las rectas que son incidentes con el punto $A(2,3)$ y distan 2 unidades del origen de coordenadas. Sol: $5x-12y+26=0$

Problemas con ángulos y bisectrices.

1.- Hallar la ecuación de la recta r que pasa por el punto (2,1) y forma con la recta $y=2x-1$ un ángulo de 45° . Sol: $x-3y+1=0$

2.- Calcula el ángulo que forman las rectas r y s en los siguientes casos: a) $r: (x,y)=(1,3)+t(1,-3)$; $s: \{x=2+7t; y=3t\}$; b) $r: y=3x-2$; $s: 2x-5y+3=0$; c) $r: 3x-2y+1=0$, $s: 2x-5y+3=0$; d) $r: 2x+y-3=0$; $s: (x+1)/7=(y-1)/4$; e) $r: x/1=(y+3)/2$; $s: (x-2)/-1=(x+1)/5$; f) $r: y=4x-2$; $s: 5x+3y=0$;
Sol: a) 85° ; b) $49'76''$; c) $34,5^\circ$; d) $86'8''$; e) $37'87''$; f) 45°

3.- Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (1, -3)$ y forma un ángulo de 45° con la recta $3x + y + 2 = 0$.

Sol: $y + 3 = 2(x - 1)$.

4.- Escribe las ecuaciones de las bisectrices de $r: 3x - 4y = 0$ y $s: 8x + 6y + 3 = 0$.

Sol: $2x + 14y + 3 = 0$; $14x - 2y + 3 = 0$.

5.- Determina la ecuación de la recta r que pasa por el punto $A = (1, 1)$ y forma con la recta $y = 3x - 2$ un ángulo de: a) 45° ; b) 60° ; c) 90° ; d) 30° . Sol: a) $x - 2y + 1 = 0$;

b) $y - 1 = \frac{5\sqrt{3} - 6}{13}(x - 1)$; c) $x + 3y - 4 = 0$; d) $y - 1 = \frac{5\sqrt{3} - 6}{3}(x - 1)$

6.- Halla las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto de intersección de las rectas $y = x + 2$ y $3x + y = 2$ formando un ángulo de 45° con la segunda de ellas. Sol: $y = 2x + 2$; $x + 2y - 4 = 0$

7.- Las rectas $2x + 3y - 3 = 0$ y $ax + y - 5 = 0$ forman un ángulo de $\delta/6$ radianes. ¿Cuánto vale a ? Sol: $a = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{3} - 2}$

8.- Dadas las rectas $r: 3x + 2y - 2 = 0$ y $s: 2x - 3y + 1 = 0$, hallar: a) El ángulo que forman. b) Las ecuaciones de las bisectrices.

Sol: a) 90° ; b) $x + 5y - 3 = 0$; $5x - y - 1 = 0$.

9.- Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $A(2, -1)$ y forman un ángulo de 45° con la recta $r: 2x + y - 2 = 0$.

Sol: $3x - y - 7 = 0$; $x + 3y + 1 = 0$

10.- Hallar las ecuaciones de las rectas que pasando por el punto $A(0, 2)$ forman ángulos iguales con las rectas $r: x + 2y - 3 = 0$ y $s: 2x + y + 2 = 0$.

Sol: $x + y - 2 = 0$; $x - y + 2 = 0$

11.- Escribir en la forma normal las rectas $r: 3x + 4y - 5 = 0$ y $r': 3x - 4y + 15 = 0$. Calcular después el valor del ángulo que forman.

Sol: $3/5 x + 4/5 y - 1 = 0$; $3/5 x - 4/5 y + 3 = 0$; 90°

12.- Hallar la ecuación de la recta que es incidente con el punto $P(1, 3)$ y forma un ángulo de 30° con la $r: 2x + y - 1 = 0$.

Sol: $y - 3 = (5\sqrt{3} + 8)(x - 1)$

13.- Hallar las ecuaciones de las rectas que son incidentes con el punto $A(2, -1)$ y forman ángulos iguales con las rectas $r: 3x + 4y - 2 = 0$ y $s: 4x + 3y = 0$. Sol: $x - y - 3 = 0$; $x + y - 1 = 0$

14.- Hallar las ecuaciones de las rectas que forman ángulos iguales con las rectas $r: x + y - 2 = 0$ y $s: 2x - 2y = 0$, y cuya ordenada en el origen es 3. Sol: $y - 3 = 0$; $4x - y + 3 = 0$

15.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,1) y forma con la recta $y = \sqrt{3}x - 2$ un ángulo de 60° . Sol: $y = 1$

16.- Determina analíticamente el ángulo que forman: a) las dos bisectrices de los cuadrantes. b) El eje de abscisas con la recta $2x - y + 2 = 0$. c) El eje de ordenadas con la recta $3x + y + 4 = 0$. d) Las rectas: $y = x - 2$ e $y = -x + 3$. Sol: a) 90° ; b) $63^\circ 26'$; c) $18^\circ 26'$; d) 90°

17.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,-1) y forma un ángulo de 60° con la recta: $\{x = 1 - t; y = 2t\}$.

$$\text{Sol: } y + 1 = \frac{8 + 5\sqrt{3}}{11} (x - 2)$$

18.- Hallar la ecuación de las rectas que pasando por P(1,-2) forma un ángulo de 45° con la $2x - y + 1 = 0$.

$$\text{Sol: } x - 3y - 7 = 0; 3x + y - 1 = 0$$

19.- Estudiar la posición de las rectas a) $x + y = 3$; $x - y = 2$; b) $x - 2y + 3 = 0$; $\{x = 1 + 2t; y = t\}$. Sol: a) Perpendiculares, se cortan; b) paralelas

20.- ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,3) y forma un ángulo de 90° con la recta $x - y = 0$? Sol: $x + y - 4 = 0$

Problemas con incógnitas

1.- Determina el valor de k para que los puntos A(2,-1), B(1,4) y C(k,9) estén alineados. Sol: $k = 0$

2.- Calcula el valor de a y b para que las rectas $ax - y + 2 = 0$ y $bx + 6y - 9 = 0$ sean perpendiculares y, además, la segunda pase por el punto P = (1,1).

$$\text{Sol: } a = 2; b = 3$$

3.- Calcula el valor de m para que las rectas r: $mx + 2y + 6 = 0$, s: $2x + y - 1 = 0$ y t: $x - y = 5$ pasen, las tres, por un mismo punto. Sol: $m = 0$; P(2,-3)

4.- Determina m y n sabiendo que la recta $2x + ny = 0$ pasa por el punto (1,2) y es paralela a la recta $mx - 2y + 3 = 0$. Sol: $m = 4$; $n = -1$

5.- Dadas las rectas r: $3x + y = 3$ y s: $-2x + ay = 8$. Determinar "a" para que formen un ángulo de 45° . Sol: $a = 1$

6.- Hallar a para que la distancia de O(0,0) a la recta r: $2x + ay - 4 = 0$ sea 2. Sol: $a = 0$

7.- Hallar la ecuación de la recta r, que pertenece al haz definido por las rectas r: $2x - y - 11 = 0$ y s: $x + y - 1 = 0$, y tal que la distancia del punto P(2,1) a r es 2 u. Sol: $3x + 4y = 0$

8.- Dada la recta $mx - 3y + m - 4 = 0$. Calcular m para que: a) dicha recta pase por el punto (1,-2). b) dicha recta sea paralela a la recta $(x-1)/3 = (y-2)/2$. Sol: a) $m = -1$; b) $m = 2$

9.- Hallar el valor de A y de B para que las rectas: $Ax + 2y - 8 = 0$ y $2x + By = 3$ se

corten en el punto (2,1). Sol: A= 3; B= -1

10.- Hallar el valor de "m" para que las rectas r: $mx+2y-3=0$; s: $2x+y+1=0$ pasen por un mismo punto. Sol: m..4

11.- Hallar "m" y "n" sabiendo que la recta $3x+my=0$ pasa por el punto (1,3) y es paralela a la recta $nx+y-2=0$. Sol: m= -1; n= -3

12.- Calcula el valor de a y b para que las rectas $ax-3y+5=0$ y $bx+2y-1=0$ sean perpendiculares y además la segunda pase por el punto (-1,2). Sol: b= 3; a= 2

13.- Las rectas $2x+y-2=0$ y $Ax+y+1=0$, forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ radianes. ¿Cuánto vale A?. Sol: $A = \frac{8 \pm 5\sqrt{3}}{11}$

14.- La recta de ecuación $x-3=0$ corta en el punto "a" a una recta que pasa por los puntos (2,3) y (-1,-3). Corta también en el punto "b" a la bisectriz del primer cuadrante. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento ab. Sol: a(3,5); b(3,3); mediatriz $y=4$

15.- Hallar el valor de "a" para que las rectas: r: $2x+ay+12=0$; s: $6x-2y=10$. Sean: a) Paralelas, hallando su distancia. b) Perpendiculares. Sol: a) a= -1; d= 5; b) a= 6

16.- Demuestra que todas las rectas cuyas ecuaciones se ajustan a la forma $y = ax-a$, pasan por un punto. ¿Cuáles son las coordenadas de ese punto?. Sol: P(1,0)

17.- Hallar "a" para que las rectas $x-2y=3$; $3x+y=2$ e $y=ax+1$ pertenezcan al mismo haz de rectas. Sol: a= -2

18.- Hallar m para que sean concurrentes $x-3y+1=0$, $x+y-3=0$ y $mx-y-3=0$. Sol: m= 2; P(2,1)

19.- Hallar "a" para que las rectas siguientes sean paralelas: a) $ax+y=1$ y $2x-y=a$; b) $(a+2)x-2y=1$ y $3ax+(a-3)y=a$. Sol: a) a= -2; b) a= 1

20.- Prueba que las rectas $y=ax+5$ e $y=(a-1)x-2$ no pueden ser ni paralelas ni perpendiculares.

21.- Halla el valor de "m" para que la recta $(x-2)/m = (y+1)/2$ sea paralela a la recta: $\{x=2t; y=t+1\}$. Sol: m= 4

22.- Dada la recta: $mx-(3-m)y+(-m+5)=0$. a) ¿Para qué valor de m dicha recta pasa por el punto (-2,1)? b) ¿Para qué valor de m la recta es paralela a la recta: $(x-2)/4 = (y-4)/2$. Sol: m= 1; m= 1

23.- Calcula el valor de m para que las rectas r) $mx+2y-7=0$; s) $x+2y-5=0$ y t) $x-y+1=0$, pasen por el mismo punto. Sol: m= 3; P(1,2)

24.- Determinar m y n sabiendo que la recta r: $6x+ny=4$ pasa por el punto (2,-1) y es paralela a la recta s: $mx+4y-2=0$. Sol: n= 8; m= 3

25.- Determinar "a" para que los puntos A(1,a) y B(1,2) disten una unidad. Sol: a= 1; a= 3

26.- Dadas las rectas siguientes, determinar "m" para que formen un ángulo de 45°. r: $3x + y = 2$; s: $2x + my = 5$. Sol: m= -1; m= 4

Problemas de triángulos

1.- En el triángulo de vértices A= (2,2), B= (-2,0) y C= (2,4), Halla la ecuación de las medianas.

Sol: $y = 2$; $3x - 4y + 6 = 0$; $3x - 2y + 2 = 0$

2.- Halla las coordenadas de los tres vértice del triángulo ABC, sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son: M= (3,3), N= (2,2) y P= (2,4).

Sol: (1,3), (3,1), (3,5)

3.- Halla los vértices del triángulo cuyos lados están sobre las rectas r, s y t de ecuaciones: r: $x = 1$; s: $x + y = 2$; t: $5x + y - 2 = 0$.

Sol: (1,1); (1,-3); (0,2)

4.- Calcula el área limitada por la recta $(x/3) + (y/6) = 1$, el eje de abscisas y el eje de ordenadas. Sol: $9 u^2$

5.- Indica qué tipo de triángulo es el de vértices ABC, siendo: a) A= (3,2); B= (1,0); C= (5,4); b) A= (2,3); B= (-1,2); C= (1,6); c) A= (1,3); B= (5,1); C= (2,5).

Sol: a) Isósc.; b) Isósc. rectángulo; c) Rectángulo

6.- Calcula el área del triángulo que tiene sus vértices en los puntos A= (1,4), B= (3,-2) y C= (-1,0). Sol: $10 u^2$

7.- Halla las coordenadas del baricentro (punto de corte de las medianas), del triángulo de vértices: A= (0,2), B= (-3,4) y C= (3,0). Sol: (0,2)

8.- Halla las ecuaciones de las alturas del triángulo que determinan los puntos A= (1,0), B= (-3,2) y C= (-1,-2) y determina el ortocentro. Sol: $2x - y = 0$; $x + y + 1 = 0$; $-x + 2y + 1 = 0$; $(-1/3, -2/3)$

9.- En el triángulo de vértices A= (3,6) y B= (5,2) y C= (1,-2). Determina: a) el baricentro; b) el ortocentro; c) el circuncentro. Sol: a) (3,2); b) $(23/3, 4/3)$; c) $(2/3, 7/3)$

10.- Busca una recta r que determine con las rectas $x - 2y + 2 = 0$ y $2x - y - 2 = 0$ un triángulo isósceles que tenga el baricentro en el punto G= (1,1). Sol: $x + y = 1$

11.- Calcula el área del triángulo formado por las rectas $3x + y - 8 = 0$; $5x - 3y + 10 = 0$ y $x - 2y + 2 = 0$. Sol: 7

12.- Encuentra las ecuaciones de las medianas del triángulo de vértices: A= (1,1), B= (1,-3) y C= (3,5). Sol: $3x - y = 4$; $y = 1$; $6x - y = 9$

13.- Se considera el triángulo de vértices $A(1,1)$, $B(5,0)$ y $C(-3,5)$. Determinar: a) Las ecuaciones de los lados. b) El ángulo B. c) Las coordenadas del ortocentro, baricentro y circuncentro.

Sol: a) $x + y - 2 = 0$; $x + 4y = 5$; $5x + 8y = 25$; b) $17'97^\circ$; c) $(-22/3, -37/3)$; $(1,2)$; $(31/6, 55/6)$.

14.- El punto $A(2,-1)$ es vértice del triángulo ABC. Las ecuaciones de las rectas que contienen a las alturas son: $3x - y = 0$ y $x - 4y + 1 = 0$, respectivamente. Hallar la ecuación del lado a y los vértices. Sol: $3x - 2y + 3 = 0$; $B(1,3)$; $C(-1,0)$

15.- Averiguar si el triángulo ABC, donde $A(-1,3)$, $B(4,8)$ y $C(-6,-2)$, es isósceles y si el de vértices $A'(2,1)$, $B'(3,-1)$ y $C'(6,3)$ es rectángulo.

Sol: ABC es isósceles y $A'B'C'$ es rectángulo en A' .

16.- Los puntos $A(2,1)$ y $B(1,3)$ son vértices del triángulo ABC. Si el ortocentro es el punto $M(4/3, 5/3)$, hallar las coordenadas del vértice C. Sol: $(-2,0)$

17.- Los puntos $B(1,4)$ y $C(8,3)$ son vértices de un triángulo rectángulo. Si BC es la hipotenusa, hallar el vértice A, sabiendo que está en la recta $y = x - 1$. Sol: $(2,1)$, $(7,6)$

18.- Los lados de un triángulo son a: $x + y = 4$ b: $3x + y - 4 = 0$ y c: $y - 1 = 0$. Hallar el área de cada uno de los triángulos en que el primitivo es descompuesto por la bisectriz del primer cuadrante. Sol: $\text{área}^1 = 1 \text{ u}^2$; $\text{área}^2 = 2 \text{ u}^2$.

19.- Hallar las ecuaciones de la recta que pasando por el punto $A(-3,8)$, forma con + OX y + OY un triángulo de área 6 u^2 .

Sol: $4x + 3y - 12 = 0$; $16x + 3y + 24 = 0$

20.- Los puntos $A(1,2)$, $B(3,0)$ y $C(5,1)$ son vértices de un triángulo. Probar que el ortocentro, circuncentro y baricentro están alineados.

21.- Dados los puntos $A(-1,-1)$ y $B(2,1)$, hallar sobre la recta $r: y = x + 2$ un punto P tal que con los dados determine un triángulo de área 4 u^2 . Sol: $(1,3)$; $(-15,-13)$

22.- Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos: $A(1,3)$, $B(3,5)$ y $C(4,0)$. Sol: 6 u^2

23.- a) Indica que tipo de triángulo es el de vértices A,B,C siendo $A(3,4)$, $B(0,0)$ y $C(4,3)$. b) Hacer lo mismo para los vértices: $A(1,3)$, $B(-3,1)$ y $C(0,0)$. Sol: a) Isósceles; b) Isósceles rectángulo.

24.- En el triángulo de vértices $A(2,2)$, $B(6,8)$ y $C(-2,2)$. Hallar el baricentro, el ortocentro y el circuncentro. Sol: Bar: $(2,4)$; Ort: $(6, -10/3)$; Cir: $(0, 23/3)$

25.- Hallar el área del triángulo formado por las rectas $y = -1$; $5x - 3y + 7 = 0$; $5x + 2y = 13$. Sol: $25/2$

26.- Dado el triángulo de vértices $A(0,3)$; $B(3,1)$, $C(2,5)$. Se pide: a) Ecuación de la altura correspondiente al vértice A; b) Ecuación de la mediana correspondiente al vértice B;

c) Area del triángulo. Sol: a) $x-4y+12=0$; b) $3x+2y=11$; c) $5 u^2$

27.- Dado el triángulo de vértices A(1,0) B(3,2) y C(-1,3). Hallar: a) Ecuación de la mediana del lado AB. b) Ecuación de la paralela a la mediana anterior por el origen de coordenadas. c) Area del triángulo. Sol: a) $2x+3y=7$; b) $2x+3y=0$; c) $A = 5u^2$

28.- Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P(2,2) y que determina al cortar a los ejes coordenados un triángulo de área $9 u^2$. Sol: $2x+y-6=0$; $x+2y-6=0$

29.- De un triángulo ABC se conocen los puntos medios de sus lados: pm AB = M(2,2); pm BC = N(0,3); pm CA = P(-1,3). Hallar las coordenadas de los vértices del triángulo y el baricentro. Sol: A(1,2); B(3,2); C(-3,4); Bar:(1/3,8/3)

30.- Construye un triángulo cuyos lados estén sobre las rectas $x+2y-5=0$; $x+5y-8=0$ y $x-y+4=0$ y calcula las coordenadas de sus vértices.
Sol: (-1,3) (3,1) (-2,2)

31.- Dados los puntos A(2,1); B(1,3) y C(-2,-1). Calcular el área del triángulo de vértices ABC. Sol: $5 u^2$

32.- a) Calcula el baricentro y los puntos medios de los lados del triángulo de vértices A(1,3), B(-3,5), C(2,1). b) Ecuación vectorial de la recta que pasa por A(2,1) y es paralela a la recta $x+2y-1=0$. Sol: a) B(0,3); (-1,4), (-1/2,3), (3/2,2), (-1/2,3); b) $(x,y) = (2,1) + \vec{e}(2,-1)$

33.- a) En el triángulo de vértices A(2,-1), B(2,5), C(0,4): a) escribir en forma paramétrica la altura correspondiente al vértice A. b) Hallar la distancia del punto A(1,-1) a la recta $-3x+4y-18=0$. Sol: a) $\{x=2-\vec{e}, y=-1+2\vec{e}\}$; b) $d=5$

34.- Dadas las rectas: $2x-3y=3$; $3x-y-1=0$; $\{x=3-4t; y=1+2t\}$. Calcula el área del triángulo que determinan. Sol: $5/2$

35.- Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos: A(3,1), B(4,2), C(0,5). Sol: $7/2 u^2$

36.- Comprobar si es isósceles el triángulo de vértices: A(3,1), B(1,3) y C(5,5). Sol: Sí

37.- Decir que tipo de triángulo tiene de vértices: A(1,4), B(3,1) y C(7,8). Sol: rectángulo

38.- Calcula el valor de a y de b para que r: $ax+2y-12=0$ y s: $2x+by=1$ se corten en el punto (2,3). Sol: $a=3$; $b=-1$

Problemas de figuras geométricas

1.- Los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo. Compruébalo con el cuadrilátero de vértices: A= (4,2); B= (2,0); C= (0,2) y D= (8,4).

2.- Calcula el vértice D del paralelogramo ABCD, sabiendo que $A = (1, -2)$; $B = (3, -1)$ y $C = (0, 3)$. Sol: $D = (-2, 2)$

3.- Un rombo ABCD, tiene su vértice A en el eje de ordenadas y otros dos vértices opuestos son $B = (1, 4)$ y $D = (3, 2)$. Determina: a) las coordenadas de los vértices A y C; b) el ángulo que forman sus lados; c) cuánto vale su área. Sol: a) $A(0, 1)$; $C(4, 5)$; b) 53° ; 127° ; c) $A = 8 \text{ u}^2$

4.- Dos lados de un paralelogramo están sobre $r: y = 3x + 9$ y $s: 2x + 5y + 6 = 0$ y tiene un vértice en el punto $(3, 1)$. Halla las ecuaciones de las rectas de los otros dos lados y las coordenadas del resto de sus vértices. Sol: $y = 3x - 8$; $2x + 5y = 11$; $(-2, 3)$, $(-3, 0)$, $(2, -2)$

5.- Un cuadrado de vértice A en el punto $(0, 1)$ y su centro el punto $(2, 1)$. Calcula las coordenadas de los otros tres vértices. Sol: $(2, 3)$, $(4, 1)$, $(2, -1)$

6.- Conocemos dos vértices de un rectángulo, $A = (1, 3)$ y $B = (3, 1)$, y sabemos que uno de sus lados está sobre la recta $y + x = 6$. Calcula las coordenadas de los otros dos vértices. Sol: $(2, 4)$ $(4, 2)$

7.- Un cuadrado tiene por vértices contiguos los puntos $A = (3, 2)$ y $B = (4, 1)$. Calcula sus otros dos vértices. ¿Cuántas soluciones tiene el problema?. Sol: Dos soluciones: $C(2, 1)$, $D(3, 0)$; $C'(4, 3)$, $D'(5, 2)$

8.- De un cuadrado conocemos dos vértices opuestos $A = (1, 2)$ y $C = (3, 6)$. Calcula sus otros dos vértices. ¿Cuántas soluciones tiene el problema?. Sol: Una solución $B(0, 5)$, $D(4, 3)$

9.- Calcula el área del cuadrilátero de vértices $A = (2, 0)$, $B = (4, 4)$, $C = (0, 3)$ y $D = (-2, -1)$. Sol: $A = 14 \text{ u}^2$

10.- El punto $A(2, 1)$ es uno de los vértices de un paralelogramo. Dos de sus lados están situados en las rectas $r: x/3 + y/-1 = 1$ y $s: x + y + 1 = 0$. Hallar las coordenadas de los vértices y las ecuaciones de los otros lados. Sol: $(3, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$; $x + y - 3 = 0$; $x - 3y + 1 = 0$.

11.- Los puntos $A(0, 1)$ y $D(4, 3)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo. El punto $M(3, 1)$ es el punto de intersección de las diagonales. Hallar las coordenadas de los otros vértices B y C, las ecuaciones de los lados, el área del paralelogramo.

Sol: $C(6, 1)$, $B(2, -1)$; $AB: x + y = 1$; $CD: x + y = 7$; $AD: x - 2y + 2 = 0$; $BC: x - 2y - 4 = 0$; $A = 12 \text{ u}^2$

12.- Los puntos $A(0, 0)$ y $C(1, 7)$ son vértices opuestos de un rectángulo. Un lado está situado sobre la recta $x - 3y = 0$. Hallar las coordenadas de los vértices B y D y las ecuaciones de los lados.

Sol: $B(-2, 6)$; $D(3, 1)$. $AB: 3x + y = 0$; $BC: x - 3y + 20 = 0$; $AD: x - 3y = 0$; $CD: 3x + y = 10$.

13.- Determinar las coordenadas de los vértices B y D del cuadrado que tiene por diagonal AC, donde $A(1, 2)$ y $C(5, 2)$. Sol: $B(3, 0)$; $D(3, 4)$.

14.- El centro de un cuadrado es el punto $P(2,2)$ y un vértice $A(2,1)$. Hallar las coordenadas de los otros dos vértices y el área del cuadrado.

Sol: $C(3,2)$ $B(1,2)$ $D(2,3)$; área= $2 u^2$

15.- Dos vértices opuestos de un rombo son los puntos $A(5,5)$ y $C(-1,-1)$; la longitud de la otra diagonal es $2\sqrt{2}$ dm. Hallar las coordenadas de B y D y el área del rombo.

Sol: $B(3,1)$; $D(1,3)$; área= 12 dm^2

16.- Dos lados de un hexágono regular están sobre las rectas $r: 3x-4y+12=0$ y $s: 3x-4y+2=0$. Hallar su área. Sol: $2\sqrt{3} u^2$

17.- Los puntos $A(1,2)$ y $B(0,3)$ son vértices consecutivos de un paralelogramo. El lado BC está sobre la recta $r: x-3y+9=0$ y el punto de intersección de las diagonales es $M(2,3)$. Hallar los otros dos vértices. Sol: $C(3,4)$; $D(4,3)$

18.- Los puntos $A(2,2)$ y $C(0,4)$ son vértices opuestos de un rombo. El vértice D está situado sobre la recta $r: 2x-y-1=0$. Hallar las coordenadas de D y las del cuarto vértice, B. Sol: $B(-1,1)$, $D(3,5)$

19.- Los puntos $A(1,1)$ y $B(3,3)$ son vértices consecutivos de un rectángulo. Sabiendo que el vértice D, opuesto al B, está sobre la recta $x+3y+2=0$, hallar las coordenadas de los vértices C y D. Sol: $C(6,0)$, $D(4,-2)$

20.- El lado AB del cuadrado ABCD está sobre la recta $r: 4x+3y=10$. Si el centro del cuadrado es el punto $M(9/2,3/2)$, hallar los vértices. Sol: $(1,2)$, $(4,-2)$, $(5,5)$, $(8,1)$

21.- Hallar las coordenadas del vértice D y las ecuaciones de los lados del paralelogramo de vértices: $A(2,2)$, $B(1,3)$ y $C(3,5)$. Sol: $D(4,4)$; $x+y=4$; $x+y=8$; $x-y=0$; $x-y+2=0$

22.- Un rombo A,B,C,D tiene su vértice A en el eje de abscisas y otros 2 vértices opuestos son $B(0,2)$ y $D(4,6)$. Determina: a) Las coordenadas de los vértices A y C. b) El ángulo que forman sus lados. c) El área. Sol: a) $A(4,0)$; $C(-1,6)$; b) 120° , 60° ; c) $A=\sqrt{610} u^2$

23.- El eje OX y las rectas $y=2$; $2x-y=0$; $2x-y=-2$, limitan un cuadrilátero. a) Hallar su área, b) las ecuaciones de sus diagonales y c) las coordenadas del punto de intersección de éstas. Sol: a) $A=2u^2$; b) $x=0$; $x-y+1=0$; c) $(0,1)$

24.- Un cuadrado tiene por vértices contiguos los puntos $A(0,3)$ y $B(2,5)$. Calcula sus otros 2 vértices. ¿Cuántas soluciones tiene el problema?.

Sol: Dos soluciones: $C(-2,5)$, $D(0,7)$; $C'(2,1)$, $D'(4,-1)$

25.- De un cuadrado conocemos 2 vértices opuestos $A(1,2)$ y $B(8,3)$ Hallar sus otros dos vértices. Sol: $(4,6)$, $(5,-1)$

26.- Los puntos $A(3,0)$, $B(1,3)$ y $C(5,2)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. a) Halla el cuarto vértice; b) Halla la recta que pasa por B y es paralela al

eje OX. Sol: a) (7, -1); b) $y = 3$

27.- Dos vértices de un paralelogramo están sobre las rectas $2x + 3y - 9 = 0$ y $3x - 2y + 6 = 0$ el vértice no situado en dichas rectas es el punto (1, -2). Halla las ecuaciones de los otros lados y coordenadas de los vértices restantes. Sol: (-2, 0), (0, 3), (3, 1); $3x - 2y = 7$; $2x + 3y + 4 = 0$

28.- Dos lados de un paralelogramo están sobre las rectas que tienen de ecuaciones $y = 2x$ e $y = -x$, sabiendo que el centro del paralelogramo es M(2, 1). Determinar los vértices. Sol: (0, 0), (2, 4), (4, 2), (2, -2)

29.- ¿Las rectas $2x + 3y - 4 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$, $-4x - 6y + 22 = 0$ y $2x - 4y + 10 = 0$ determinan un paralelogramo?. En caso afirmativo calcular sus vértices. Sol: (-1, 2), (1, 3), (4, 1), (2, 0)

30.- Se tiene el cuadrilátero ABCD con A(3, 2); B(1, -2); C(-1, -1); D(1, 3). Comprueba que es un paralelogramo y calcula su centro y su área. Sol: (1, 1/2); $A = 10 \text{ u}^2$

31.- Encuentra las ecuaciones correspondientes a los lados de un paralelogramo donde los vértices conocidos son: A(0, 0), B(-1, 2), C(3, 2). Sol: $2x + y = 0$; $2x + y - 8 = 0$; $y = 2$; $y = 0$

32.- Dados los vértices de un cuadrilátero ABCD siendo A(1, 3), B(5, 7), C(7, 5), D(3, 1). Calcula los puntos medios de sus lados y comprueba que forman un paralelogramo. Sol: (3, 5), (6, 6), (5, 3), (2, 2)