

Examen de derivadas

1. Razona la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- a)  $f(x)$  toma todos los valores entre  $f(a)$  y  $f(b)$ , ¿es continua?
- b) Si  $f'(x) > 0$  y  $g'(x) > 0$  en  $[a,b]$  ¿cómo es  $h = 2f(x)+5g(x)$  en  $[a,b]$ ?
- c) Si  $f'(a) = f''(a) = 0$ , ¿existe extremo en  $a$ ?
- d) Si una función está acotada, ¿es continua?
- e) ¿Una función continua es derivable?

2. Estudia qué hipótesis del teorema de Rolle se cumplen en el intervalo  $[0,3/2]$  para

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 3 - 2x & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \quad \text{Haz la gráfica}$$

- 3. a) Define máximo absoluto y máximo relativo.
- b) Estudia los extremos relativos y absolutos de  $f(x) = |x^2 - 9|$
- c) Haz la gráfica.

4. Sea la función  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x}$

- a) Halla sus asíntotas.

5. Halla:  $\lim_{x \rightarrow p} (\operatorname{tg} x)^{p-x}$

Soluciones:

- 3. b) Max (0,9), Min (-3,0), (3,0)
- 4.  $x=0$ ;  $y=x-2$
- 5. 1

Examen derivadas e integrales

1.- Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función:  $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ \text{sen } x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

2.- Halla:

a)  $\int \frac{x+1}{x^3-5x^2+8x-4} dx$       b)  $\int_{-p}^p e^x \text{sen } x dx$       c)  $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

d)  $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$       e)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^3 x dx$

3.- Enunciar y demostrar el teorema fundamental del cálculo integral. Usalo para calcular G'(x):

$$G(x) = \int_e^{x^2} \text{sen } t dt$$

4.- Máximos, mínimos, puntos de inflexión e intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$$

5.- Halla:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \text{sen} \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}}$       b) Asíntotas de  $f(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 2}$

Soluciones:

1. f(x) continua en  $\mathbb{U}$ ; f(x) derivable en  $\mathbb{U}-\{0\}$

2. a)  $-2 \ln |x-2| - \frac{3}{x-2} + 2 \ln |x-1| + c$       b)  $\frac{e^p - e^{-p}}{2}$

c)  $\text{arcsen} \frac{x}{2} + c$       d)  $\text{arctg } e^x + c$       e)  $\frac{1}{3}$

3.  $G'(x) = \text{sen } x^2 \cdot 2x$

4. Mínimo (0,4); Decrece: (-4,-1)C(-1,0); Crece: (0,1)C(1,4); (-4,-1)1; (-1,1)C; (1,+4)1

5. a) 1; b) x=1; x=-1; y=x/2

Examen derivadas e integrales

1.- Teorema de Rolle. Enunciado y demostración

Estudiar si se cumple el teorema del valor medio del cálculo diferencial  $f(x) = \sqrt{x-2}$  en [1,3]

2.- Teorema del valor medio del cálculo integral. Enunciado, demostración e interpretación geométrica.

Si  $F(x) = \int_0^x e^{t-2} - 1 dt$  hallar  $c/F'(c) = 0$

3.- a) Hallar las asíntotas de  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x - 2}$

b) Estudiar dominio, crecimiento y decrecimiento de  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

4.- Calcula:  $\int \frac{(x+3) dx}{x^3 - x^2 - 2x}$

5.- Calcula el área comprendida entre la función  $f(x) = \frac{4x}{4+x^2}$  y la recta que pasa por el máximo y el mínimo.

6.- Dada la función  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$  en [1,2]. Comprueba si se cumple el teorema del valor medio del cálculo integral y halla el punto que cumple dicho teorema.

7.- Calcula  $\int (1 - x^2) \cdot e^x dx$

**Soluciones:**

1) No

2)  $x=2$

3) a)  $y=1$ ;  $x=1$ ,  $x=-2$ ; b) Dom:  $(0,1) \cup (1,+4)$ ;  $(0,1) \cup (1,e)$  Decrece y  $(e,4)$  Crece

4)  $-\frac{3}{2} \ln|x| + \frac{5}{6} \ln|x-2| + \frac{2}{3} \ln|x+1| + c$

5)  $A = 4 \ln 8 - 4 \ln 4 - 1$

6)  $x = \sqrt{2}$

7)  $(-x^2 + 2x - 1) \cdot e^x + c$

Examen derivadas e integrales

- 1.- a) Teorema del valor medio del cálculo diferencial  
b) Teorema del valor medio del cálculo integral

2.- a) Estudiar si se cumple el teorema de Rolle en la función  $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$  en el intervalo  $[-2, 2]$ . En caso afirmativo, hallar el punto cuya existencia asegura el teorema.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\sec x}$$

3.- Un tractor se encuentra en un punto A de una finca, a una distancia de 200 m de un punto B de una carretera recta. La distancia del punto B al almacén es de 1 Km. Si el tractor se mueve a 20 Km/h por la finca y a 40 Km/h por la carretera. ¿A qué distancia del punto B se debe incorporar a la carretera para llegar al almacén lo antes posible?

4.- Halla: a)  $\int \frac{e^{2x} dx}{e^x + 1}$       b)  $\int \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

5.- a) Ecuación de la tangente a la gráfica de la función  $y = \ln x^2$  en  $x = 1$

6.- Área limitada por la gráfica de la función  $y = \ln(x+2)$  y los ejes.

**Soluciones:**

2) a) No derivable en  $x = 1$ ; b) e

3)  $\frac{200}{\sqrt{3}}$

4) a)  $e^x - \ln|e^x + 1| + c$ ; b)  $\arcsen x - \sqrt{1-x^2} + c$

5)  $y = 2x - 2$

6)  $A = 2 \ln 2 - 1$

Examen de derivadas e integrales

- 1.- a) Teorema del valor medio del cálculo diferencial  
b) Teorema del valor medio del cálculo integral

2.- Enunciado del teorema de Rolle. Contesta razonadamente a las siguientes cuestiones:

- a) Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función  $f(x)=x^2 \cdot e^x$  en el  $[-1,1]$ .  
b) ¿Existe algún punto del intervalo  $(-1,1)$  en el que se anule la derivada de la función anterior?

3.- a) Hallar las asíntotas de  $y = e^x/x$ .

b) Halla:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left( \frac{x-1}{x+1} \right)$$

4.- a) Calcular la integral de  $\int \sqrt{x} e^{2\sqrt{x}} dx$

Cambio de variable  $\sqrt{x} = t$

b)  $\int \frac{x}{4+x^4} dx$

5.- Hallar el área que determina  $f(x) = \ln(x+1)$ , el eje OY y la normal a  $f$  en  $x=1$ .

**Soluciones:**

2) a) No cumple; b) En  $x=0$

3) a)  $x=0$ ;  $y=0$  si  $x \neq -4$ ; b)  $-2$

4) a)  $x e^{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} e^{2\sqrt{x}} + \frac{e^{2\sqrt{x}}}{2} + c$       b)  $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \left( \frac{x^2}{2} \right) + c$

5)  $3/4 - \ln 2$

Examen derivadas e integrales

1.- Teorema del valor medio del cálculo diferencial. Enunciado, demostración e interpretación geométrica.

2.- a) Hallar  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{2x}$

b) Hallar las asíntotas de la función  $y = e^{-x} \cdot x$ . Calcula los extremos relativos. Con estos datos represéntala.

3.- Hallar el área que determina  $y = x \cdot e^x$ , el eje OY y la tangente a la curva en el mínimo.

4.- Calcular: a)  $\int \frac{x \, dx}{3 + x^4}$  b)  $\int \frac{x - 1}{x^2(x + 2)} \, dx$

Soluciones:

2) a) 1/2; b) A.H.:  $y=0$  cuando  $x=0$ ; máximo (1,1/e)

3)  $A = 3/e - 1$

4) a)  $\frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right) + c$ ; b)  $\frac{3}{4} \ln |x| + \frac{1}{2x} - \frac{3}{4} \ln |x+2| + c$

Examen derivadas

1.- Encontrar a y b para que sea continua la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 + 2}{x - 1} & \text{si } x \leq 0 \\ x - b & \text{si } 0 < x < 1 \\ \text{sen}(ax) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2.- ¿Es derivable para algún valor de a y b la función:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot e^x & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } 0 < x < 1 \\ x + x \ln^2 x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

3.- Ecuación de la recta tangente a  $y = \ln(x)$  en  $x=1$

4.- Demuestra que  $f(x) = x^3$  y  $g(x) = x^2 - 1$  tienen un punto de corte en  $[-2,0]$ .

5.- La suma de los catetos de un triángulo rectángulo es de 50 cm. Halla sus dimensiones para que la superficie de ese triángulo sea máxima.

6.-  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x^2}}$

Soluciones:

1.-  $a = \frac{3}{2}$ ;  $b = 2$

2.-  $a = 1$ ;  $b = 0$

3.-  $y = x - 1$

5.- Dos catetos iguales de 25 cm

6.- 1

Examen derivadas e integrales

1.- Teorema del valor medio del cálculo diferencial. Enunciado, demostración e interpretación geométrica.

2.- Hallar el área limitada por la curva  $y = x^2 \cdot \ln x$ , el eje OX y las rectas  $x=1/2$  y  $x=2$ .

3.- a) Calcula:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x}$

b) Calcula:  $\int \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx$

4.- Dada la función  $y = e^{-x} \cdot (x-1)$ . Calcula: Corte con los ejes, asíntotas y extremos relativos. Con estos datos, represéntala.

Soluciones:

2.-  $21/8 \ln 2 - 49/72$

3.- a) 0; b)  $-\frac{6}{5} \sqrt[5]{x^5} + \frac{3}{2} \sqrt[4]{x^4} + c$

4.- (0,-1), (1,0); Asíntotas:  $y=0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ ; máximo (2,  $e^{-2}$ )

Examen derivadas e integrales

1.- Teorema del valor medio del cálculo diferencial. Enunciado, demostración e interpretación geométrica.

2.- Hallar el dominio, crecimiento y decrecimiento de la función:  $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x^2-9}}$

3.- Hallar las asíntotas de la función:  $\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{x+1}$

4.- Hallar:  $\int x \arctg x^2 dx$                        $\int \frac{2x-1}{x(x-3)^2} dx$

5.- Hallar el área encerrada entre la función  $y = (x-1)e^{-x}$ , el eje OX y la tangente a la curva en el punto  $x=0$ .

Solución:

2. Dom =  $(-4,3) \cup (3,+4)$ ; Crece  $(-4,-3) \cup (-3,3)$ , Decrece  $(3,+4)$

3.  $x=1$ ;  $y=e^3$

4. a)  $x^2/2 \arctg x^2 - 1/4 \ln|1+x^4| + c$ ; b)  $-1/9 \ln|x| + 1/9 \ln|x-3| - 5/(3x-9) + c$

5.  $1/e - 1/4$

Examen integrales

1.- Teorema fundamental del cálculo integral. Dedúcelo.

2.- Enuncia el teorema del valor medio del cálculo integral y aplícalo a la función  $f(x) = 1/\sqrt{x}$  en el intervalo  $[1,4]$

3.- Máximos y mínimos de la función  $\int_1^x \frac{dt}{\ln t}$  siendo  $x > 1$

4.- Área limitada por la gráfica de la función  $y=2x+x^2$  y las tangentes a dicha gráfica en los puntos de intersección con el eje de abscisas.

5.- Efectúa:

a)  $\int \left( \frac{\ln^2 x}{x} + \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx$

b)  $\int x^3 e^x dx$

c)  $\int \frac{\sqrt[6]{2x+2}}{\sqrt{x+1} + \sqrt[3]{x+1}} dx$

Soluciones:

2.-  $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = f(c) \cdot (4-1) \Rightarrow c = \frac{9}{4}$

3.- Decece en  $(0,1) \cup (1,4)$ , no hay máximos ni mínimos.

4.-  $2/3$

5.- a)  $\frac{(\ln x)^3}{3} + \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{2} + \sqrt{1+x^2} + c$

b)  $e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$

c)  $6 \sqrt[6]{2} \left[ \frac{\sqrt[6]{(x+1)^4}}{4} - \frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{3} + \frac{\sqrt[6]{(x+1)^2}}{2} - \sqrt{x+1} + \ln(\sqrt{x+1}) \right] + c$

Examen integrales

1.- Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral y aplícalo para determinar los máximos y mínimos de la función:  $F(x) = \int_1^{x^2} \ln t \, dt$

2.- Halla las siguientes primitivas:

a)  $\int \frac{1}{x^2 - 1} \, dx$

b)  $\int \sqrt{x^3 - 2x^2} \, dx$

c)  $\int \cos^2 x \, \text{sen}^3 x \, dx$

d)  $\int \text{sen} x \, e^x \, dx$

3.- Halla el área de la región del plano limitada por las gráficas de las funciones  $y=x^3$  e  $y=x$ .

4.- Concepto de primitiva de una función. Deduce las propiedades.

Soluciones:

1. Mínimo  $x=1$

2. a)  $\frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + c$

b)  $\frac{2}{3} x \sqrt{(x-2)^3} - \frac{4}{15} \sqrt{(x-2)^5} + c$

c)  $-\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + c$

d)  $\frac{e^x \text{sen} x - e^x \cos x}{2} + c$

3.  $A = 1/2$

Examen derivadas

TEORÍA

- 1.- Define:      a) Continuidad en un punto y en un intervalo.  
                     b) Derivada de una función en un punto.  
                     c) Máximo local
- 2.- Enuncia:     a) Teorema de Bolzano. Interpretación geométrica.  
                     b) Regla de L'Hôpital.

CUESTIONES

- 1.- ¿Una función continua, creciente y que posea recta tangente en un punto es derivable en ese punto?. Razónalo con un ejemplo.
- 2.- Es posible que f sea creciente en a siendo f'(a)=0. En caso afirmativo dibuja un ejemplo, en caso negativo explica porqué.
- 3.- Sabiendo que f'(2)=1, f''(2)=f<sup>(3)</sup>(2)=f<sup>(4)</sup>(2)=0, f<sup>(5)</sup>=3.  
 En x=2, la función ¿presenta un máximo, mínimo o punto de inflexión?. Razonar la respuesta.

PROBLEMAS

- 1.- Queremos construir una caja de base cuadrada de volumen 54 cm<sup>3</sup>. Si el material para construir las bases cuesta el doble que el de las paredes. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja para que el coste sea mínimo?.
- 2.- Comprueba si se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle en las siguientes funciones. En caso afirmativo indica dónde se cumple la tesis.

- a)  $f(x) = \sqrt[3]{(x-3)^2}$  en  $[0,6]$
- b)  $f(x) = |x^2 + 9|$  en  $[-2,2]$
- c)  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x+1} & \text{si } 0 \leq x \leq 5 \end{cases}$  en  $[-1,2]$

- 3.- Estudia y representa:  $y = e^{-x}(x-2)$

- 4.- Calcula:  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{\operatorname{cosec} x}$

Soluciones:

1. 3H3H6  
 2. a) No; b) Sí, x=0; c) No  
 4. e

Examen derivadas

- 1.- a) Enuncia y di cuál es la interpretación geométrica del teorema de Rolle. Razona la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:  
b) Si  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  existe por lo menos un punto  $c \in (0,1)$  tal que  $f(c) = 2$   
c) Toda función acotada es continua  
d) Toda función continua en  $\mathbb{R}$  es acotada en  $\mathbb{R}$   
e)  $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$   $\vee f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$

- 2.- Regla de L'Hôpital: Enunciado y demostración. Aplícala para calcular el límite siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cot x)^{x^2}$$

- 3.- Dada la función  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , halla "a", "b", "c" y "d" sabiendo que la tangente en el punto de inflexión (0,2) es  $y = -3x + 2$  y que la función presenta un extremo en el punto de abscisa -1.

- 4.- ¿Cuál es el radio de la base de un cilindro de volumen máximo inscrito en una esfera de radio 2  $\sqrt{3}$  m?  
%

- 5.- Representa la función:  $y = x \cdot e^{-x}$

Soluciones:

1. b) V; c) F; d) F; e) F  
2. 1  
3.  $y = x^3 - 3x + 2$   
4.  $r = 2\sqrt{2}$

Examen derivadas e integrales

1.- Estudiar la continuidad y derivabilidad de  $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2-4}$

2.- Averigua si  $f(x) = \sqrt{1-\operatorname{sen} x}$ , verifica las hipótesis del teorema del valor medio en  $[0, \pi/2]$ .

3.- Calcula  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - e^{-x})^{e^x}$

4.- Estudia y representa:  $y = x \cdot e^x$

5.- Calcula:

a)  $\int \frac{\cos x}{e^{2 \operatorname{sen} x}} dx$

b)  $\int (x^2 + e^x \cos x) dx$

c)  $\int \frac{dx}{x^3 + 1}$

Soluciones:

1.- Continua en  $\mathbb{U} \setminus \{-2, 2\}$ ; Derivable en  $\mathbb{U} \setminus \{-2, 1, 2\}$

2.- Sí cumple

3.-  $1/e$

5.- a)  $-\frac{e^{-2 \operatorname{sen} x}}{2} + c$ ; b)  $\frac{x^3}{3} + \frac{e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x}{2} + c$ ;

c)  $\frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c$

Examen derivadas e integrales

1.- Teorema de Rolle.

Comprueba si lo verifica la función:

$$y = \sqrt[3]{x^2} \text{ en } [-1,1]$$

2.- Regla de Barrow. Calcular:  $\int_{-p}^p \operatorname{sen} x \cos x \, dx$

3.- Representa la función  $y = e^x$ .

Area determinada por la función , el eje OX y las rectas  $x=1$ ,  $x=2$ .

4.- Calcular:  $\int \frac{2x+1}{x^2+x-6} \, dx$

5.- Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{cosec} x}$

Soluciones:

1. No

2. 0

3.  $e^2 - e$

4.  $\ln |x+3| + \ln |x-2| + c$

5. 0

Examen derivadas e integrales

1.- Teorema de Rolle.

Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función  $f(x)=x^2 \cdot e^x$  en  $[-1,1]$

2.- Teorema del valor medio del cálculo integral.

Comprobar la verificación de su tesis para la función  $f(x)=3x^2-2x$  en  $[0,1]$ .

3.- Calcular: 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen}3x}{x + \operatorname{sen}2x}$$

Enunciar la regla de L'Hôpital.

4.- Calcular: 
$$\int \frac{2x+1}{x^2+4x+4}$$

5.- Calcular máximos, mínimos y asíntotas de  $y = \frac{\ln x}{x}$  y el área limitada por la función, el eje OX y la recta  $x=e$ .

Soluciones:

1. No

2.  $x=2/3$

3.  $-2/3$

4.  $\ln |x^2+4x+4| + \frac{3}{x+2} + c$

5. Max  $(e,1/e)$ ; A.H.  $y=0$ ; A.V.  $x=0$ ; Area =  $1/2$

Examen derivadas e integrales

1.- Teorema de Rolle.

Calcular b para que la función  $f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 3$  cumpla la hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo  $[0, b]$ . ¿Dónde cumple la tesis?

2.- Enuncia la regla de L'Hôpital.

Calcula: 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen} x - 2x}{\operatorname{tg} x - x}$$

3.- Representar la función:  $y = e^{-x}$ . Calcula sus asíntotas.

4.- Teorema del valor medio del cálculo integral.

Interpretación geométrica. Comprobarlo para la función  $f(x) = x^3 + 2$  en el intervalo  $[-1, 1]$ .

5.- Calcular:  $\int \frac{x-1}{x^2-6x+9} dx$        $\int \operatorname{arcsen} x dx$

6.- Hallar el área limitada por  $y = x^3 - 6x^2 + 8x$  y el eje OX.

Soluciones:

1.  $b=1; x = \frac{-1 + \sqrt{7}}{3}$

2. -1

3. A.H.  $y=0$  si  $x=4$

4.  $x=0$

5.  $\frac{1}{2} \ln |x^2 - 6x + 9| - \frac{2}{x-3} + c; x \cdot \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + c$

6. Área =  $256 u^2$

Examen derivadas e integrales

1.- Teorema del valor medio del cálculo integral.

Comprobar si verifica el teorema del valor medio la función  $y = \cos x - 2 \operatorname{sen} x$  en  $[0, \frac{\pi}{2}]$

2.- Estudia la continuidad y la derivabilidad de las funciones:

a)  $y = |x^2 - 9|$

$$b) y = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 3 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ -x^2 + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

3.- Enuncia la regla de L'Hôpital. Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{1 - \cos x} \qquad \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^x$$

4.- Calcula dominio, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos de  $y = x \cdot \ln x$

5.- Calcular:  $\int \frac{x - 3}{x^3 - 4x^2 + 3x} dx$

6.- Representar y calcular el área limitada por  $y = \ln x$ , la recta  $y=2$  y los ejes de coordenadas.

Soluciones:

2. a) continua en  $\mathbb{U}$ ; derivable en  $\mathbb{U} - \{-3, 3\}$

b) Continua en  $\mathbb{U}$ ; derivable en  $\mathbb{U} - \{2\}$

3. 0; 1

4. Dom: (0,4), mínimo (1/e, -1/e), crece (1/e, +4), decrece (0, 1/e)

5.  $-\ln|x| + \ln|x-1| + c$

6.  $e^2 - 1$

Examen derivadas e integrales

1.- Calcula:  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \operatorname{sen} 2x)^{\operatorname{ctg} x}$

2.- Máximos y mínimos de  $f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$

3.- Integra: a)  $\int (x - \operatorname{sen}^2 x) dx$                       b)  $\int \frac{x-2}{x^2-4x+25} dx$

4.- Calcula el área limitada por las funciones:  $y = 2x^2 + x$ ;  $y = x^2 - 2x$

5.- Teorema del valor medio del cálculo integral.  
Enuncia la regla de L'Hôpital.

Soluciones:

1. 1

2. Max. en  $x=1$ ; mín. en  $x=0$

3. a)  $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} + c$ ; b)  $\frac{1}{2} \ln |x^2 - 4x + 25| + c$

4.  $A=9/2$

Examen derivadas e integrales

1.- Enuncia el teorema de Bolzano de funciones continuas.

Estudia la continuidad y derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - x^3 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

2.- Teorema del valor medio del cálculo diferencial. Comprueba si lo verifica la función  $f(x) = 2x - 3x^2$  en el intervalo  $[0,1]$ . En caso afirmativo halla el punto cuya existencia asegura el teorema.

3.- Calcula:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) \cdot x}{1 - \cos x}$$

4.- Calcula:

$$\text{a) } \int \sin^2 x \, dx \quad \text{b) } \int \frac{x-1}{x^2-4x+4} \, dx$$

5.- Teorema fundamental del cálculo integral. Enunciado y demostración.

6. -Representar las curvas  $y = 1+2x-x^2$ ,  $y = |x-1|$  y calcular el área limitada por ellas.

Soluciones:

1. Cont. en  $\dot{U}\{1\}$ ; deriv. en  $\dot{U}\{0,1\}$

2.  $x=1/2$

3. a)  $1/2$ ; b)  $2$

4. a)  $\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + c$ ; b)  $\frac{1}{2} \ln |x^2 - 4x + 4| - \frac{1}{x-2} + c$

6.  $A = 7/3$

Examen derivadas e integrales

1.- Teorema de Rolle. Interpretación geométrica y demostración.  
Comprueba el teorema del valor medio del cálculo diferencial en la función:  $f(x) = 1/x$  en [1,e]

2.- Calcula:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - e^x}{x^2}$$

3.- Calcula:

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-2x} dx$$

4.- Hallar el área comprendida entre la función  $y = \frac{\ln x}{x}$ , la recta tangente en el máximo y los ejes de coordenadas. (Hacer la representación)

5.- Hallar los máximos, mínimos, crecimiento y decrecimiento de  $f(x) = \frac{x^2}{x^2+x-2}$

6.- Hallar las asíntotas de la función:  $y = \frac{x^3}{x^2-1}$

Soluciones:

1.  $x = \sqrt{e}$

2. 0

3.  $-\frac{1}{2} \ln|x| + \frac{2}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln|x+2| + c$

4. 1/2

5. Max (0,0), Mín (4,8/9)

6.  $x=1, x=-1, y=x$

Examen derivadas e integrales

- 1.- a) Teorema de Rolle. Demostración e interpretación geométrica.  
b) Satisface la función  $y = 1-|x|$  el teorema de Rolle en  $[-1,1]$

- 2.- a) Enuncia la Regla de L'Hôpital.  
b) Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \left( \operatorname{sen} \frac{x}{2} \right)^{\frac{x}{2}} \qquad \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right)$$

- 3.- a) Representar:  $y = \frac{x^2}{x^2+1}$

- 4.- a) Teorema del valor medio del cálculo integral. Interpretación geométrica.

- b) Compruébalo para la función  $y = \frac{x-1}{x+1}$  en  $[0,3]$

5.- Calcular:  $\int \frac{x+1}{x^2+x-6} dx$      $\int \operatorname{arctg} x dx$

- 6.- Calcular el área limitada por la función  $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$  el eje OX,  $x=0$ ,  $x=1$

Soluciones:

1. No
2. 1; 1/6
- 3.
4. b)  $x=1$  0 (0,3)
5.  $\frac{3}{5} \ln|x-2| + \frac{2}{5} \ln|x+3| + c$ ;  $x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c$
6.  $1 - \frac{3}{4}$

Examen derivadas e integrales

1.- Teorema del valor medio del cálculo diferencial.  
Demostración e interpretación geométrica.

2.- a) Calcula:  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 2x}$

b) Hallar las asíntotas de la función:  $y = \frac{e^x}{x}$

3.- Hallar el área limitada por la curva  $y = \frac{1}{x^2+1}$  y el eje OX entre  $x=-1$  y  $x=1$ .

4.- a) Calcula:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x - e^{\cos x} dx$

b) ¿Cumple las condiciones del teorema del valor medio del cálculo diferencial la función:  $f(x) = \begin{cases} 8x - 6 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x^2 + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$  en  $[0,4]$ ?

Soluciones:

2.- a)  $5/2$ ; b)  $x=0$ ;  $y=0$  si  $x \neq 0$

3.-  $\pi/2$

4.- a)  $e-1$

b) Sí;  $5/2$  O  $(0,4)$

Examen derivadas

1.- Estudiar el dominio, asíntotas, extremos y monotonía de la función  $y=(x-2).e^{-x}$

2.- a) Si  $f(x)$  es continua en  $x=x_0$  Y  $f(x)$  es derivable en  $x=x_0$

b) Si  $f(x)$  es derivable en  $x=x_0$  Y  $f(x)$  es continua en  $x=x_0$

c) Si  $f(x)$  no es derivable en  $x=x_0$  Y  $f(x)$  no es continua en  $x=x_0$

d) Si  $f(x)$  no es continua en  $x=x_0$  Y  $f(x)$  no es derivable en  $x=x_0$

3.- Halla el límite:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x}$

4.- ¿Cumplen las siguientes funciones el teorema del valor medio?.

a)  $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$  en  $[-1,1]$

b)  $g(x)=\begin{cases} 3+x^2-x^5 & x \leq 1 \\ \frac{3}{x} & x > 1 \end{cases}$  en  $[-2,2]$

5.- Teorema de Rolle. Enunciado, demostración e interpretación geométrica.

Soluciones:

1. Dom:  $\mathbb{R}$ ; A.H.:  $y=0$  cuando  $x=2$ ; Máx  $(3, e^{-3})$ ; Crece  $(-4, 3)$ , decrece  $(3, +4)$

2. F, V, F, V

3.  $1/2$

4. a) No; b) Sí

Examen Derivadas

1.- a) Definición e interpretación geométrica del teorema de Bolzano y Weierstrass. Consecuencias.

b) Teorema del valor medio del cálculo diferencial, enunciado e interpretación geométrica.

2.- a) ¿Es posible hallar "a" para que la función sea derivable en todo su dominio?. Justificarlo.

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ a(1-x) & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

b) Si f(x) es continua en [1,3], f(1)=-6 y f(3)>2, ¿podemos asegurar que g(x)=f(x)+3 tiene al menos un cero en [1,3]?

c) Si una función y=f(x) tiene f(a) = 0 y f'(a) = 0, ¿puede tener un mínimo relativo en x=a?

3.- Determinar k para que exista y sea finito el límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + kx - 1 - \frac{x^2}{2}}{x - \operatorname{sen} x}$  y calcúlalo para ese valor de k.

4.- Halla el punto de la curva y=1/x cuya distancia al origen sea mínima.

5.- a) Representa la función  $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

b) Halla la ecuación de la tangente a la curva y = e<sup>x</sup>(x+3) en su punto de inflexión.

Soluciones:

2. a) a=-1; b) Sí; c) Sí

3. k=-1; lim=1

4. (1,1), (-1,-1)

5. b) x+e<sup>5</sup>y+7=0

Examen Derivadas

1.- a) Enunciado e interpretación geométrica del teorema de Rolle.

b) Dada  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$  qué hipótesis cumple del teorema de Rolle en el intervalo  $[-1, 1]$

2.- ¿Para qué valores de "a" y "b" será continua la función?:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - e^{ax} + x^2}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 2b & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3.- Calcula: a)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - x - 1}$

4.- Halla las asíntotas de  $f(x) = \frac{x^3}{e^x - 1}$

5.- Halla la ecuación de la recta tangente a la curva  $y = e^x \cdot x^2$  en su máximo.

6.- a) Enunciado e interpretación geométrica del teorema de Bolzano.

b) Si  $f(x)$  es continua en  $[1, 4]$ ,  $f(1) = -3$  y  $f(4) = 5$ , prueba que hay un punto al menos en  $[1, 4]$  tal que  $f(x_0) = 3$ .

7.- ¿Cuál es el triángulo rectángulo de área mínima con una hipotenusa de  $\sqrt{50}$  cm?

Soluciones:

2. a=1; b=1/2

3. a) 1; b) 2

4. y=0 si  $x \neq -4$ ; x=0

5.  $y = 4/e^2$

7. 5, 5

Examen Integrales

1.- a) Enunciado e interpretación geométrica del teorema del valor medio del Cálculo Integral.

b) Enunciado del teorema fundamental del Cálculo Integral

c) Regla de Barrow.

2.- Halla el área limitada por  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$  el eje OX y las rectas  $x=1$  y  $x=2$ .

3.- Dibuja y halla el área limitada por las gráficas de  $f(x) = \frac{-x^2 + 4x}{3}$  y  $g(x) = |2 - x|$

4.- Calcula: a)  $\int \frac{3x}{(x-1)(x+2)} dx$       b)  $\int \cos^3 x dx$

c)  $\int \frac{x+1}{\sqrt{1+x^2}} dx$       d)  $\int \frac{dx}{4+x^2}$

5.- Halla el área limitada por  $y = \ln x$ ,  $y = 0$  y  $x = e$ .

**Soluciones:**

2. A =  $3/2 - \ln 2$

3. A =  $13/9$

4. a)  $\ln|x-1| + 2 \ln|x+2| + c$ ; b)  $\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$

c)  $\arcsen x - \sqrt{1-x^2} + c$ ; d)  $\frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} + c$

5.- A = 1

Examen Integrales

1.- a) Teorema del valor medio del cálculo integral. Interpretación geométrica.

2.- a) Al calcular el área de un recinto por una integral definida, ¿depende el cálculo de la primitiva que se utilice?. Razona la respuesta.

b) ¿Si una función  $f(x)$  se mantiene positiva para todos los valores de  $x$ , cualquier función primitiva de ella es siempre creciente?

3.- Calcula:

a)  $\int \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx$       b)  $\int \frac{x-1}{e^x} dx$       c)  $\int \text{sen}^2 x + \text{sen}^3 x dx$

d)  $\int \left( \frac{2}{\sqrt{9-x^2}} + \frac{e^{\text{tg } x+1}}{3 \cos^2 x} \right) dx$

4.- Determina la función  $y = ax^2 + bx + c$  sabiendo que su gráfica pasa por el punto  $P(1,2)$  y que la tangente en  $P$  es paralela a la recta  $y=5x+4$  y que  $f'(x) = 2$ .

5.- a) Si  $f(x) = \begin{cases} x^2 & -2 \leq x < 0 \\ 3x & 0 \leq x \leq 1 \\ 6 - 3x & 1 < x \leq 3 \end{cases}$ , representa  $f(x)$  y calcula  $\int_{-2}^3 f(x) dx$

b) Calcula el área limitada por  $f(x) = \frac{2x}{x^2+4}$ , el eje  $X$  y las rectas  $x=a$  y  $x=b$ , siendo  $a$  y  $b$  las abscisas del máximo y el mínimo de  $f(x)$ .

Soluciones:

3. a)  $6 \left( \frac{\sqrt[6]{x^9}}{9} + \frac{\sqrt[6]{x^8}}{8} + \frac{\sqrt[6]{x^7}}{7} \right) + c$  1; b)  $-\frac{x}{e^x} + c$ ;

c)  $\frac{1}{2} x - \frac{\text{sen}^2 x}{4} - \cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$ ; d)  $2 \arcsen\left(\frac{x}{3}\right) + \frac{1}{3} e^{\text{tg } x+1} + c$

4.  $y = x^2 + 3x - 2$

5. a)  $25/6$ ; b)  $A = 2 \ln 2 = \ln 4$