ALGEBRA

1. Si A y B son matrices cuadradas de orden n, ¿se cumple la relación $(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2$?

2. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$. Hallar el valor de:

a) $\begin{vmatrix} 2(a-e) & c-i & b-h \\ 2(d-e) & f-i & e-h \\ 2e & i & h \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2g-3i & 2a-3c & 2d-3f \\ h/2 & b/2 & e/2 \\ i & c & f \end{vmatrix}$

3. Enuncia el teorema de Rouché-Frobenius. Discutir según los valores de m y resolverlo en el caso de compatible determinado:

$x_1 + mx_2 = 0$
$mx_1 - x_2 = m$
$3x_1 + x_2 = 2$

4. Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

Resolver: AX + BY = C
AX = YD

Soluciones:

2. a) -4; b) -2; c) 2

3. m=-1 S.C.D. $x_1=2$, $x_2=1/2$
m=2 S.C.D. $x_1=4/5$, $x_2=-2/5$

4. $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ALGEBRA

1. ¿Es cierta la afirmación $(A+B).(A-B) = A^2-B^2$ siendo A y B matrices cuadradas de orden n?

2. Si $|A| = 2$, siendo A una matriz de 3×3. Hallar a) $|3A|$; b) $|A^{-1}|$; c) $|(A^{-1}.A^t)^{-1}|$

3. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 5 & -11 & 2 \\ 4 & -4 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

resuelve matricialmente $A \cdot B \cdot X - C \cdot X = 2D$

4. Discutir según los valores de m, cuando tiene solución el siguiente sistema, cuántas tiene y hállalas todas:

mx - my = -1
(m+1)x + y + z = 0
2x + 2z = 2

5. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -3 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix}$

a) Triangula la matriz A
b) Según λ halla el rango de A
c) ¿Para qué valores no tiene inversa?. Halla A^{-1} si $\lambda = 1$.

Solución:

2.- a) 54; b) 1/2; c) 1

3.- $X=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -4 & 8 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

4.- m=0 S.I.; m=-1 S.C.I.; m≠0 y m≠-1 S.C.D

5.- b) $\lambda=-2$ r(A) = 2; $\lambda\neq-2$ r(A) = 3; c) $\lambda=-2$; $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 5/6 & 1/6 & -7/6 \\ 1/6 & -1/6 & -5/6 \end{pmatrix}$

ALGEBRA

1. Si F_1, F_2, F_3 son las filas de una matriz $A \in M_{3\times 3}$ y $|A|=5$. Hallar a) $|A^{-1}|$; b) $|(a^t.A)^{-1}|$; c) $|(F_1-F_2, 2F_3, F_2)|$

2. Si A.B = A.C, entonces ¿se puede decir que B=C?. Razónalo si $|A|=0$ y si $|A|\neq 0$.

3. Enuncia el teorema de Rouché-Frobenius. Clasificación de sistemas.

Sea el sistema $\left.\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ 2x & - & y & = & 0 \end{array}\right\}$ Escríbelo en forma matricial y resuélvelo por medio de la matriz inversa.

4. Discutir el sistema y resolverlo en el caso de compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & (m+1)y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & my & & & = & 1 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

5. Eliminar los parámetros a y b.

x = 1 - a - b
y = 2 + a + b
z = 3 + 2a - b
t = a - b

<u>Solución:</u>

1. a) 1/5; b) 1/25; c) -10

3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; x=1, y=2

4. $m=1 \Rightarrow r(A) = 2 = r(A^*)$ S.C.I.
$m \neq 1 \Rightarrow r(A) = 3 = r(A^*)$ S.C.D.
$m=1 \Rightarrow x=\lambda,\ y=1-2\lambda,\ z=-1+3\lambda$

5. $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2z & - & 3t & = & 7 \\ y & - & 2z & + & 3t & = & -4 \end{array}\right.$

ALGEBRA

CUESTIONES

a) Demuestra que $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$

b) En general para dos matrices cualesquiera, ¿se cumple que: $(A+B)^2 = A^2 + 2\,A\cdot B + B^2$?

c) Pon un ejemplo, si es posible, de sistemas de ecuaciones que cumplan las siguientes condiciones:
- a) Dos ecuaciones con tres incógnitas que sea incompatible.
- b) Dos ecuaciones con tres incógnitas que sea compatible indeterminado.
- c) Dos ecuaciones con tres incógnitas con solución única.
- d) Tres ecuaciones con dos incógnitas que sea compatible y determinado.

EJERCICIOS

1.- Discute el siguiente sistema según los distintos valores del parámetro "a", y resuélvelo en el caso compatible indeterminado:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & ay & + & z & = & 0 \\ ax & + & 2y & + & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

2.- Aplica el método de Gauss para calcular el rango de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

3.- Resuelve la ecuación matricial: $X\cdot A - X\cdot B = C$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix};\quad C=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 6 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluciones:

1. $a=1 \Rightarrow r(A) = 2 = r(A^*)$ S.C.I. $\quad x=\lambda,\ y=1+\lambda,\ z=-1-3\lambda$
$a=2 \Rightarrow r(A) = 2 \neq r(A^*) = 3$ S.I.
$a\neq 2$ y $a\neq 1 \Rightarrow r(A) = 3 = r(A^*)$ S.C.D.

2. $r(A) = 3$

3. $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ALGEBRA

1.- Enuncia las propiedades de los determinantes.

2.- a) Discutir el sistema
b) Resolver por Gauss y Cramer
c) ¿Cómo sería la discusión si los términos independientes fueran todos nulos?.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & k-2 \\ -x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ & & ky & + & 4z & = & 1 \end{array}\right\}$$

3.- Haciendo uso del método de Gauss, discutir el rango de la matriz B según los valores del parámetro a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & -7 & a \end{pmatrix}$$

4.- Razona: a) ¿Un sistema homogéneo puede ser incompatible?; b) ¿Un sistema homogéneo puede ser compatible indeterminado?

5.- Dadas las matrices A y B encontrar una matriz simétrica P tal que $B = P^{-1} A P$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -7 & -2 \end{pmatrix}$$

<u>Soluciones:</u>

2. a) k=3 6 r(A) = 2 ... r(A^*) = 3 6 S.I.
k...3 6 r(A) = r(A^*) = 3 6 S.C.D.

3. a = 1 6 r(A) = 2
a ... 1 6 r(A) = 4

4. a) No; b) Sí

5. $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

ALGEBRA

1.- a) Teorema de Rouche
b) Se sabe que det (A) = 4 y que A es una matriz de orden 4. ¿Cuánto vale det (2A)?. Razónalo.

2.- Averiguar para qué valores de "t" la matriz A no tiene inversa. Calcular la matriz inversa de A para t = 2, si es posible.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & t & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.- Hallar el rango de la matriz A para los distintos valores de t.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & t & 1 & 0 \\ 2 & -1 & t & 1 \\ 2 & -3 & -1 & t \end{pmatrix}$$

4.- Dado el sistema:
a) Discutirlo
b) Resolverlo para a = 1

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & 2y & + & 2z & = & 3 \\ 3x & + & y & + & (a+3)z & = & -2 \\ 2x & + & y & + & (a+1)z & = & -1 \end{array}\right\}$$

5.- Determinar el valor de a para que el sistema sea compatible y resolverlo por Gauss.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 1 \\ -x & - & y & + & z & = & -2 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & a \end{array}\right\}$$

<u>Soluciones:</u>

1.- Det (2A) = 64
2.- a) t = 3

b) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

3.- a) t = 1 6 r(A) = 2
t ... 1 6 r(A) = 3
4.- a) a = 2 6 r(A) = 2 ... r(A^*) = 3 6 S.I.
a ... 2 6 r (A) = 3 = r(A^*) 6 S.C.D.
b) x = -2; y = 2; z =
5.- a) a = 3
b) x = 1; y = 1; z = 0

ALGEBRA

1.- a) Regla de Cramer.

b) Enunciado del teorema de Rouche-Frobenius.

2.- Hallar la matriz X sabiendo que A.X+B.X=C, siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

3.- Discutir el siguiente sistema según los valores de á y resuélvelo en el caso compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} (a-2)x & - & y & - & z & = & a-3 \\ 3x & + & ay & + & z & = & (a+3) \\ 2x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}\right\}$$

4.- Discutir según los valores de a el sistema homogéneo:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} (a+2)x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ (a-1)x & + & ay & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

Soluciones:

2. $X=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. á = 1 6 S.C.I. {x=1, y=1-ë, z=ë}

á = 0 6 S.C.I. {x=1-ë/3; y=1-ë/3; z=ë}

á ... 1 y á ... 0 6 S.C.D.

4. a = 0 6 S.C.I.

a = 2 6 S.C.I.

a ... 0 y a ... 2 6 S.C.D.

ALGEBRA

1.- Enuncia el teorema de Rouche-Frobenius.

2.- Hallar la matriz X si A.X+X=B, siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

3.- Haciendo uso de las propiedades de los determinantes hallar A.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & 1 \\ -1 & -1 & x & 1 \\ -1 & -1 & -1 & x \end{vmatrix} = A$$

4.- Discutir según los valores de a, el sistema:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & + & z & = & a \\ x & + & ay & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & az & = & 1 \end{array}\right\}$$

5.- Resolver el sistema anterior cuando sea posible.

6.- Dado $\left.\begin{array}{ccccc} mx & + & y & = & 0 \\ x & + & my & = & m+1 \end{array}\right\}$, se pide m para que:

a) No tenga solución.
b) Tenga infinitas soluciones.
c) Tenga solución única.
d) Tenga solución única y x=3.

<u>Soluciones:</u>

2. $X=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. A = $(x+1)^3$
4. a=0 6 S.I.
a=1 6 S.C.I.
a...0 y a...1 6 S.C.D.
5. a = 1 6 x=0; y=1-ë; z=ë
a...0 y a...1 6 z=y=(-a+2)/2a; x=((a-1)(a+2))/2a
6. a) m=1; b) m=-1; c) m..."1; d) m=2/3

ALGEBRA

1.- Define matriz inversa. ¿Qué condición se ha de dar para que una matriz tenga inversa?. Halla la inversa de A, si la tiene.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.- Hallar X e Y, sabiendo que:

$$X + Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2X - Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

3.- Define rango de una matriz y sistema de Cramer.
Discutir según los valores de ë y resolver en el caso compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & - & 2z & = & -1 \\ -x & + & ly & + & z & = & 1 \\ lx & & & - & z & = & 0 \end{array}\right\}$$

4.- Enuncia las propiedades de los determinantes.
Halla el rango de la matriz, e indica la existencia de inversa, según los valores de m.

$$\begin{pmatrix} m & 2 & m \\ 1 & 0 & -m \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Soluciones:</u>

1. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

2. $X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $Y=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

3. ë = 1 6 r(A)=2=r(A*) S.C.I.
ë= 6 r(A)=2...r(A*)=3 S.I. ë=1: x=k; y=1; z=k
ë...1 y ë... 6 r(A)=3=r(A*) S.C.D.

4. m=1 6 r(A) = 2
m=-2 6 r(A) = 2
m...1 y m...-2 6 r(A) = 3
›A^{-1}] m...1 y m...-2 Y $A^{-1}=\dfrac{1}{(m-1)(m+2)}\begin{pmatrix} m & m-2 & -2m \\ -1 & m & m^2+m \\ 1 & -m & -2 \end{pmatrix}$

ALGEBRA

1.- Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n, ¿se cumple la igualdad $(A\text{-}B)^2 = A^2\text{-}2AB+B^2$?

2.- Halla el valor del determinante: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

3.- Discute y resuelve el sistema siguiente, en el caso compatible indeterminado. Escríbelo en forma matricial.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & (m+1)z & = & 3 \\ (3+m)x & - & 3y & & \_ & = & 6 \end{array}\right\}$$

4.- Define matriz inversa y rango de una matriz.
Resuelve el siguiente sistema en forma matricial, usando matriz inversa.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 2 \\ 3x & - & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right\}$$

5.- Teorema de Rouche-Frobenius.

<u>Soluciones:</u>

2. 8

3. m...-9 y m...0 6 r(A)=3=r(A*) S.C.D.
m=0 6 r(A)=2=r(A*) S.C.I. {x=ë; y=ë-2; z=1-ë}
m=-9 6 r(A)=2...r(A*) S.I.

Forma matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & (m+1) \\ (3+m) & -3 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

4. x=1; y=1; z=-1

ALGEBRA

1.- Teorema de Rouché-Frobenius.
Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ -2x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & = & 0 \end{array}\right\}$$

2.- Hallar el rango de A en función de m. Hallar A^{-1} para m=0.

$$\begin{pmatrix} m & -2 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3.- Calcular la matriz $B^{-1}.A^{2}.B$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4.- Escribe un sistema, si es posible, de tres ecuaciones con dos incógnitas:
a) Incompatible
b) Compatible indeterminado
c) Compatible determinado con solución x=1 e y=1

<u>Soluciones</u>:

1. x = y = z = 0

2. m=1 ó m=-2 $\Rightarrow$ r(A) = 2; m $\neq$ 1 y m $\neq$ -2 $\Rightarrow$ r(A) = 3

$$m = 0 \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. $B^{-1} . A^{2} . B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

ALGEBRA

1.- a) ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente para que una matriz tenga inversa?
b) ¿Puede una matriz de 2×3 tener inversa?

2.- ¿Para qué valores de λ tiene inversa la matriz A?. Halla A^{-1} para $\lambda=1$.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \lambda & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

3.- Rango de una matriz. Si una matriz $M \in M_{3x3}$ su determinante $|M| = 0$. ¿Qué se puede afirmar del rango? ¿y de la matriz inversa?. Justifícalo.

4.- Enuncia el teorema de Rouché-Frobenius
Discutir y resolver en el caso compatible indeterminado el siguiente sistema.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ -2x & + & my & - & z & = & 0 \\ -x & + & 2y & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

5.- Discutir según los valores de m:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} mx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & mz & = & 1 \end{array}\right\}$$

<u>Soluciones:</u>

2. $\forall\lambda\in\mathbb{R}\ \exists A^{-1}$; $\lambda=1 \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

3. $r(A)<3 \Rightarrow \nexists A^{-1}$

4. $m = 3$ S.C.I. $\{x=-2\lambda;\ y=-\lambda;\ z=\lambda\}$
   $m \neq 3$ S.C.D.

5. $m = 1 \Rightarrow$ S.C.I.
   $m = -2 \Rightarrow$ S.I.
   $m \neq 1$ y $m \neq -2 \Rightarrow$ S.C.D.

ALGEBRA

1.- Sea $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ Comprueba que $(A+I)^2=0$ siendo I la matriz identidad

Obtener la matriz inversa A^{-1}.

2.- Comprobar que el determinante es nulo, sin desarrollarlo.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$$

3.- Enuncia el teorema de Rouché-Frobenius.
Discute el sistema según los valores de a y resuélvelo en el caso compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 0 \\ 2x & - & y & - & 2z & = & 0 \\ x & + & y & + & az & = & 0 \end{array}\right\}$$

4.- Discutir según el valor del parámetro m, el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & my & + & z & = & 1 \\ 2x & + & my & + & 2z & = & 3 \\ x & & & + & mz & = & 2 \end{array}\right\}$$

5.- Define rango de una matriz.

<u>Soluciones:</u>

1. $A^{-1}=\begin{pmatrix} -5 & 0 & -8 \\ -3 & -1 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

3. a=-1 Y S.C.I. {x=ë; y=0; z=ë}; a...-1 Y S.C.D.

4. m=0 Y S.I.
   m=1 Y S.C.I.
   m...0 y m...1 Y S.C.D.

ALGEBRA

1.- Producto de matrices. Propiedades.
¿Se cumple siempre que $A^2-B^2 = (A+B)(A-B)$?, siendo A y B matrices cuadradas de orden n. Razónalo.

2. Resolver $A.X+B.Y = C$; $A.X = Y$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3.- Si A es una matriz de 3×3 con determinante, $|A|=3$. Hallar $|3A|$, $|A^2|$ y $|A^{-1}|$

4.- Dada la matriz A, ¿para qué valores de α existen A^{-1}?. Halla A^{-1} para $\alpha=0$.

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 0 & \alpha & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5.- Regla de Cramer.

6.- Discutir y resolver:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & az & = & 2a \\ x & - & ay & & & = & 0 \\ 2x & + & (a-1)y & + & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

<u>Soluciones:</u>

1. No

2. $X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad Y=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $|3A|=81$; $|A^2|=9$; $|A^{-1}|=1/3$

4. $\alpha \neq 1$; $\alpha=0 \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. $a = -1/3 \rightarrow$ S.C.I. $\{x=\lambda, y=-3\lambda, z=2-6\lambda\}$
$a = 1 \rightarrow$ S.C.I. $\{x=y=1-\lambda/2; z=\lambda\}$
$a\neq -1/3$ y $a\neq 1 \rightarrow$ S.C.D. $\{x=0; y=0; z=2\}$

ALGEBRA

1.- Aplicando las propiedades de los determinantes, comprueba que el siguiente determinante es nulo.

$$\begin{vmatrix} a-2 & b-2 & c-2 \\ 2 & 2 & 2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{vmatrix}$$

2.- Enuncia el teorema de Rouché-Frobenius.
Discutir y resolver cuando sea posible según los valores de a:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & y & + & az & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ 3x & - & y & + & az & = & 0 \end{array}\right\}$$

3.- Hallar X e Y, soluciones del sistema matricial:

$$2X + Y = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X - Y = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.- Rango de una matriz. Calcular el rango de la matriz A y calcular su inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>Soluciones:</u>

2. a=1 6 S.C.I. {x=ë; y=1+ë; z=1-2ë}
a=3 6 S.I.
a...1 y a...3 S.C.D. {x=-2/(a-3), y=2, z=2/(a-3)}

3. $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

4. r(A) = 2 Y òA^{-1}

ALGEBRA

1.- Teorema de Rouché-Frobenius

2.- Para qué valor de λ tiene inversa la matriz A. Hallar A^{-1} con $\lambda=1$.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.- Discutir y resolver en el caso compatible determinado.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & \alpha z & = & \alpha \\ & & \alpha y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & \alpha \end{array}\right\}$$

4.- Enunciar cuatro propiedades de los determinantes.
Demostrar:

$$\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 1 & 1 & 1 \\ x-2 & y-2 & z-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b & 2b & c \\ 2 & 2 & 1 \\ x+y & 2y & z \end{vmatrix}$$

<u>Soluciones</u>:

2. $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 7$ $\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

3. $\alpha=1 \Rightarrow$ S.C.I.
$\alpha=-2 \Rightarrow$ S.C.I.
$\alpha \neq -2$ y $\alpha \neq 1 \Rightarrow$ S.C.D. $\qquad x=\alpha/2,\ y=0,\ z=0$

ALGEBRA

1. Halla el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Rango de una matriz.
Calcular el rango de la matriz A según los valores de á:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{a} & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & \mathbf{a} \\ \mathbf{a} & 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

3. Discutir y resolver en caso compatible indeterminado el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} (a-2)x & + & 2y & & \_ & = & -1 \\ 2x & + & 4y & + & az & = & a+1 \\ 2x & + & y & + & az & = & 1 \end{array}\right\}$$

4. Resuelve la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

<u>Soluciones</u>:

1. 15

2. á = 1 Y r(A) = 2
   á ... 1 Y r(A) = 3

3. a = 0 Y S.C.I. {x=1/2; y=0; z=ë}
   a = 2 Y S.I.
   a ...0 y a...2 Y S.C.D.

4. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

ALGEBRA

1.- Encontrar b para que la matriz tenga rango 1.

$$\begin{pmatrix} b & -3 & 2 \\ 2 & 3 & b \\ 4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

2.- Resolver la ecuación A.X=B-C.X, siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.- Haciendo uso de las propiedades de los determinantes, calcular el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & -1 \\ 1 & a & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

4.- Discutir según los valores de a, el sistema. Resolver para a=-1.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & (a+1)z & = & 2 \\ -x & + & 2y & + & 2z & = & 1 \\ ax & - & 2y & + & 2z & = & -1 \end{array}\right\}$$

5.- Pon un ejemplo de un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas que:

a) No tenga solución

b) Tenga infinitas soluciones

c) Tenga solución única

<u>Soluciones:</u>

1. b=-2

2. $X=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

3. $-(a-1)^3$

4. a=3 $\rightarrow$ S.I.
   a=-2 $\rightarrow$ S.I.
   a $\neq$ 3 y a $\neq$ -2 $\rightarrow$ S.C.D.

a=-1 $\Rightarrow$ {x=3/2, y=1/2, z=3/4}

ALGEBRA

TEORÍA

1.- Inversa de una matriz. Definición y propiedades.

2.- Responde de forma razonada a las siguientes cuestiones:

a) ¿Todas las matrices cuadradas admiten inversa? Hay alguna matriz rectangular que tenga inversa?

b) ¿Es posible encontrar un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas que tenga solución única? ¿y de tres ecuaciones con dos incógnitas?

c) De las siguientes igualdades:

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & a+b \\ 0 & b & b+c \\ 1 & c & a+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & b & c \\ 1 & c & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & b & b \\ 1 & c & c \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & b & b \\ 1 & c & c \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & b & b \\ 1 & c & c \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & a & ac \\ 0 & b & ba \\ 1 & c & cb \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 0 & b & b \\ 1 & c & c \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & a & c \\ 0 & b & a \\ 1 & c & b \end{vmatrix}$ di cuáles son ciertas y cuáles falsas.

PRÁCTICA

3.- Halla la matriz X tal que AX+B = X siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$

(Si te sirve de algo, recuerda que X = IX)

4.- Discute, según los valores del parámetro á, y resuélvelo cuando sea compatible e indeterminado el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & (\alpha+1)z & = & 0 \\ -x & + & \alpha y & - & z & = & 0 \\ 3x & + & y & + & \alpha z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Soluciones:

2. a) No, no; b) No, sí; c) son certas a) y b)

3. $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

4.- $\begin{cases} \alpha = -3 & S.C.I. \\ \alpha = 1/2 & S.C.I. \\ \alpha \neq 1/2 \ y \ \alpha \neq -3 & S.C.D. \end{cases}$

á=1/2 {x=ë; y=-2ë; z=-2ë}

á=-3 {x=ë, y=-3ë/5, z=4ë/5}

ALGEBRA

1.- Resuelve la ecuación matricial AX + B = C siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.- Discute el siguiente sistema:

$$\begin{cases} kx + y + 3z = 1 \\ x + ky - 3z = 2 \\ x + y + 3z = k \end{cases}$$

3.- Si $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 3$ halla:

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+5 & b+5 & c+5 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} c & b & a \\ z & y & x \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2a-2c & 2b & 2c \\ x-z & y & z \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ a & b & c \\ x-z & y-z & 0 \end{vmatrix}$$

4.- Si |A| = 2 y |2A| = 16, ¿cuál es el orden de A?

5.- Sabiendo que A, B 0 M_{4H4}, |A| = 3 y |B| = 2 calcula:
a) $|A^{-1}|$; b) $|B^t.A|$; c) $|(A.B^{-1})^t|$

6.- Define: matriz inversa, matriz simétrica, matriz traspuesta, matriz unidad, matriz triangular. Enuncia el teorema de Rouche-Frobenius.

Soluciones:

1. $X=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

2. k=1 Y S.C.I.
   k=-1 Y S.I.
   k...1 Y S.C.D.
3. a) 3/2; b) -3; c) 6; d) 6
4. Orden 3
5. a) 1/3; b) 6; c) 3/2

ALGEBRA

1.- a) Enuncia la regla de Cramer. Enuncia el teorema de Rouché-Frobenius.

b) Dado el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{ccccccc} 3x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 1 \end{array}\right.$

b_1) Añade, si es posible, una ecuación lineal de manera que el sistema resultante sea incompatible.

b_2) Añade, si es posible, una ecuación lineal de manera que el sistema resultante sea compatible determinado.

b_3) Añade, si es posible, una ecuación lineal de manera que el sistema resultante sea compatible indeterminado.

b_4) Escribe, si es posible, un sistema de 3 ecuaciones lineales con dos incógnitas compatible determinado.

2.- a) Resuelve la ecuación matricial XA-B=2X, siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3.- Discutir y resolver según los valores de a el sistema: $\left.\begin{array}{ccccccc} ax & + & y & + & z & = & 1 \\ 3x & + & 2y & + & az & = & 3 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right\}$

4.- a) Calcula, según los valores de a, el rango de la matriz: $A=\begin{pmatrix} a & a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a & a \end{pmatrix}$

b) Si A es una matriz 3x3 tal que rg(A) = 3 razona cuál es el rango de A^2, A^3...A^n

5.- Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$ Calcula razonadamente $\begin{vmatrix} 6c & -2b & 2a \\ 3i & -h & -g \\ 3f & -e & d \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} a+d & b & g-d \\ b+e & e & h-e \\ c+f & f & i-e \end{vmatrix}$

<u>Soluciones</u>:

2. $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

3. a=1 Y S.C.I. x=1+ë, y=-2ë, z=ë
a=2 Y S.I.
a...1 y a...2 Y S.C.D. x=0, y=(a-3)/(a-2), z=1/(a-2)

4. a) a="1 Y r(A)=2; a..."1 Y r(A)=3
b) $r(A^2) = r(A^3) = ... = r(A^n) = 3$

5. -12, 2