

CÁLCULO DIFERENCIAL

1.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x+2)}; \quad g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 + x^2 - 2x}; \quad h(x) = |x^2 + x - 2|$$

$$i(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq -2 \\ e^x & \text{si } -2 < x < 0 \\ \cos x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad j(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad k(x) = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2-2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$l(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad m(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Sol: f(x) continua en $\dot{U}-\{1,-2\}$; g(x) continua en $\dot{U}-\{-2,0,1\}$; h(x) continua en \dot{U} ; i(x) continua en $\dot{U}-\{-2\}$; j(x) continua en $\dot{U}-\{1\}$; k(x) continua en \dot{U} ; l(x) continua en $\dot{U}-\{1\}$; m(x) continua en \dot{U}

2.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$a) y = \frac{x-2}{x^3 - x^2 - 2x} \quad b) y = \ln [(x-3) \cdot (x+1)] \quad c) y = e^x; \quad d) y = \operatorname{tg} 3x$$

$$e) y = |x-1| \quad f) y = \frac{1}{\ln |x-1|}; \quad g) y = \sqrt{1-x^2}; \quad h) f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{(x-1)(x-3)} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Sol: a) continua en $\dot{U}-\{-1,0,2\}$; b) continua en $(-4,-1) \cup (3,4)$; c) continua en \dot{U} ; d) continua en $\dot{U}-\{\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}\}$; e) continua en \dot{U} ; f) continua en $\dot{U}-\{0,1,2\}$; g) continua en $[-1,1]$; h) continua en $\dot{U}-\{1\}$

3.- Hallar m y n para que sea continua la función:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x < 0 \\ mx + n & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Sol: m = 2; n = 0

4.- Probar que la ecuación $x^3 - 3x - 1 = 0$ tiene por lo menos una raíz real en el intervalo (1,2).

5.- a) Comprueba que la función $f(x) = x^2 + x - 1$ corta al eje de abscisas en algún punto de [0,2], b) se puede decir lo mismo de la función $f(x) = (x^3 - 3)/(x - 1)$?

Sol: a) Sí; b) No cumple Bolzano

6.- La función $y = \sec(x)$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ y, sin embargo, no se anula en él, ¿contradice esto el teorema de Bolzano?

Sol: No

7.- Demuestra que si una función $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$ y existe un número k tal que $f(b) < k < f(a)$ entonces existe un número $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = k$.

8.- Estudia la derivabilidad de las funciones:

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x \leq 0 \\ \text{sen } x & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad b) g(x) = |x-1| \quad c) h(x) = |x^2 + 5x + 6|$$

Sol: $f(x)$ derivable en \mathbb{U} ; $g(x)$ derivable en $\mathbb{U} - \{1\}$; $h(x)$ derivable en $\mathbb{U} - \{-2, -3\}$

9.- Calcula "a" y "b" para que la función f sea derivable en todo \mathbb{U} .

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 2 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 + bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{Sol: } a = 5/2; b = 6$$

10.- Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x - 4 & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$c) h(x) = |x-1| \quad d) y = \sqrt{4 - x^2} \quad e) f(x) = \begin{cases} x^3 \text{ sen } \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Sol: a) $f(x)$ continua y derivable en $\mathbb{U} - \{3\}$; b) $f(x)$ continua y derivable en $\mathbb{U} - \{1\}$; c) $h(x)$ continua en \mathbb{U} y derivable en $\mathbb{U} - \{1\}$; d) $f(x)$ continua en $[-2,2]$; derivable en $(-2,2)$; e) $f(x)$ continua en \mathbb{U} y derivable en \mathbb{U} .

11.- Comprueba que la ecuación $x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$ tiene una solución en el intervalo $[0,1]$

12.- Estudia si la función $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - 2x - 3}$ está acotada en el intervalo $[0,4]$

Sol: No

13.- Dada la función $f(x) = \frac{1}{x-1}$; si $x \neq 1$, obténgase la derivada enésima de $f(x)$.

$$\text{Sol: } f^n(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}}$$

14.- Dada la función $f(x) = \ln(x+1)$, si $x > -1$, obténgase la derivada enésima de $f(x)$.

$$\text{Sol: } f^n(x) = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(x+1)^n}$$

15.- Encuentra K , para que la función $f(x) = x^2 - Kx$, tenga en $x = 2$, una recta tangente que forme un ángulo de 45° con el eje de abscisas. Sol: $K = 3$

16.- Halla a para que la función $y = ax^2 + 2x + 3$ tenga en $x=1$ una recta tangente que forme un

ángulo de 45° con el eje de abscisas.

Sol: $a=-1/2$

17.- Halla los puntos de la función $y = x^3 - 3x^2 + 1$, en los cuales la tangente es paralela a la recta $y=9x+2$. Sol: -1, 3

18.- Halla la ecuación de las rectas tangentes y normales a las curvas en los puntos que se indican:

a) $y = (x+1) \sqrt{x-2}$ en $x=3$; b) $y = \sqrt[3]{x-1}$ en $x=0$

c) $y = \frac{\operatorname{sen}(x) - \operatorname{cos}(x)}{\operatorname{sen}^2 x}$ en $x = \frac{\pi}{4}$ d) $y = e^{\frac{1}{x}} + \ln x$ en $x=1$

Sol: a) $y=3x-5$; $x+3y-15=0$; b) $y=x/3 - 1$; $y=-3x-1$;

c) $y=2\sqrt{2}x - \sqrt{2}/2$; $y=-x/2\sqrt{2} + \sqrt{2}/8$;

d) $y = \frac{1+e}{e} x - 1$ $y = \frac{-e}{1+e} x + 1 + \frac{1}{e^2 + e}$

19.- La curva $y = ax^2 + bx + c$ pasa por el punto $P(1,5)$, y es tangente en el punto $(0,1)$ a la bisectriz del primer cuadrante. Halla la ecuación de la curva. Sol: $y = 3x^2 + x + 1$

20.- ¿En qué puntos del intervalo $(0,5)$ la tangente a la curva $y = \operatorname{arctg}(2x)$ es paralela a la recta $2x-37y=6$. Sol: $x=3$

21.- ¿En qué puntos de la curva $y = x^3 - x^2 - 2x$ la recta tangente forma un ángulo de 135° con la parte positiva del eje de abscisas?. Sol: $x = -1/3, 1$

22.- ¿Satisface la función $f(x)=2-|x-1|$ las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-2,2]$? ¿Y la función $\sqrt[3]{x}$?

Sol: No, No

23.- Indicar si las funciones f y g verifican las hipótesis del teorema del valor medio (de Lagrange) y, en caso afirmativo, encontrar los puntos intermedios cuya existencia asegura el teorema:

a) $f(x) = x^2 - x + 1$ en $[0,2]$. b) $g(x) = \ln x$ en $[1,e]$

Sol: a) $x=1$; b) $x=e-1$

24.- La función $f(x) = x^3 - 9x + 1$ cumple el teorema de Rolle en el intervalo $[0,b]$. ¿Cuál es el valor de b ? Hallar el punto intermedio cuya existencia asegura el teorema. Sol: $b = 3$; $x = \sqrt{3}$

25.- Halla la fórmula para la derivada n -ésima de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x \cdot e^x$; b) $g(x) = \ln(3-x)$; c) $h(x) = e^{-x} - e^x$

Sol: a) $f^n(x) = (x+n) e^x$; b) $g^n(x) = \frac{(-1)^n (n-1)!}{(3-x)^n}$; c) $h^n(x) = (-1)^n e^{-x} - e^x$

26.- Halla el valor de a para que la función $y=x^2-ax+2$ tenga un mínimo en $x=1$. Sol: $a=2$

27.- Halla a, b, c y d para que la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tenga un máximo en el punto $(0,1)$ y un mínimo en $(1,2)$. Sol: $f(x)=-2x^3+3x^2+1$

30.- Halla el valor de a para que la función $y=x^2+2x+a$ tenga un mínimo en $x=1$. Sol: $a=0$.

31.- Halla b, c y d para que la función x^3+bx^2+cx+d tenga un extremo en (2,0) y un punto de inflexión en $x=1$. Sol: $y=x^3-3x^2+4$

32.- Estudia si las siguientes funciones cumplen las hipótesis del teorema del valor medio. En caso afirmativo calcula el punto que dice el teorema que tiene que existir:

a) $f(x) = \sqrt{x+1}$ en $[0,3]$ b) $g(x) = \text{sen } x$ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ Sol: $x = 5/4$; $x = \arccos 2/\sqrt{5}$

33.- ¿Cumple la función $f(x) = |x^2-4|$ el teorema de Rolle en el intervalo $[1,3]$? Sol: No

34.- La función $y = \sqrt{x}$ cumple el teorema del valor medio en el intervalo $[4,6]$? ¿Y en el intervalo $[-2,2]$? Sol: Sí, No

35.- ¿Cumple el teorema del valor medio la función:

$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 3 \\ x^2 - 40x + 8 & x \geq 3 \end{cases}$ en $[2,6]$? Sol: Sí; $x = 17/5$

36.- Comprobar si $f(x)=x^2-2x+1$ cumple el teorema de Rolle en el intervalo $[0,2]$. Sol: Sí

37.- Comprobar si $f(x)=x^2-2|x|+1$ cumple el teorema de Rolle en el intervalo $[-1,1]$. Sol: no

38.- Comprobar si la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ 3x - 4 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ cumple el teorema de Bolzano en el intervalo $[-1,1]$. Sol: no

39.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{3x-2}{x^2-x}$ b) $g(x) = \frac{x-3}{\ln|x-1|}$ c) $h(x) = |x^2-3x+2|$

d) $i(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2-1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ x+2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ e) $j(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -1 \\ x-1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ x^3+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Sol: a) $f(x)$ continua en $\mathbb{U} - \{0,1\}$; b) $g(x)$ continua en $\mathbb{U} - \{0,1,2\}$; c) $h(x)$ continua en \mathbb{U} ; d) $i(x)$ continua en $\mathbb{U} - \{2\}$; e) $j(x)$ continua en $\mathbb{U} - \{-1,0\}$

40.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si } x \neq -1 \\ -2 & \text{si } x = -1 \end{cases} & \text{b) } g(x) &= \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x - 1}{(x + 2)x} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 3 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ \frac{-8x}{x^2 - 6x + 5} & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \\
 \text{c) } h(x) &= \begin{cases} \sin x & \text{si } x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x - 1 & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} & \text{d) } i(x) &= \begin{cases} (x - 1) \cos \frac{1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Sol: a) continua en \mathbb{U} ; b) continua en $\mathbb{U} - \{0, 1, 5\}$; c) continua en $\mathbb{U} - \{\pi/2\}$; d) continua en \mathbb{U}

41.- Probar que la ecuación $x^3 - 3x - 1 = 0$ corta al eje X en el intervalo (1,3).

42.- Cumple la función $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x - 1}$ el teorema de Bolzano en el intervalo [0,4]. Sol: No

43.- Estudiar la derivabilidad de la función $f(x) = x^2 - 3|x| + 2$. Sol: derivable en $\mathbb{U} - \{0\}$

44.- Hallar a y b para que sea continua la función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 3ax - b & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Sol: a = 1; b = 2

45.- Estudia la derivabilidad de las funciones:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{b) } g(x) = |x - 4| \quad \text{c) } h(x) = |x^2 + x - 2|$$

Sol: a) f(x) derivable en \mathbb{U} ; b) g(x) derivable en $\mathbb{U} - \{4\}$; c) h(x) derivable en $\mathbb{U} - \{-2, 1\}$

46.- Calcula "a" y "b" para que la función f sea derivable en todo \mathbb{U} .

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x \leq 1 \\ bx + 2x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{Sol: a} = 1; \text{ b} = 0$$

47.- Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + x + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{|x - 3|}{x - 3} & \text{si } x \neq 3 \\ 0 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$$c) f(x)=|x^2+2x+1| \quad d) f(x)=\sqrt{4-x^2} \quad e) f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x < 1 \\ 2x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{2x^2+4}{3} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Sol: a) $f(x)$ continua y derivable en $\dot{U}-\{-1,1\}$; b) $f(x)$ continua y derivable en $\dot{U}-\{3\}$; c) $f(x)$ continua en \dot{U} y derivable en $\dot{U}-\{-1\}$; d) $f(x)$ continua en $[-2,2]$; derivable en $(-2,2)$; e) $f(x)$ continua \dot{U} y derivable en $\dot{U}-\{2\}$.

48.- Comprueba que la ecuación $x^3-2x-2=0$ tiene una solución en el intervalo $[0,2]$

49.- Estudia si la función $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2-2x-3}$ está acotada en el intervalo $[1,4]$

Sol: No

50.- Obtégase la derivada enésima de $f(x)$:

a) $f(x)=\frac{1}{x+1}$; si $x \neq -1$ b) $f(x)=\ln(x-2)$ $x>2$ c) $f(x)=e^{2x}$

Sol: a) $f^n(x)=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$ b) $f^n(x)=\frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(x-2)^n}$ c) $f^n(x)=2^n \cdot e^{2x}$

51.- Encuentra K , para que la función $f(x)=x^3-Kx^2+3$, tenga en $x=1$ por recta tangente $y=-x+3$. Sol: $K=2$

52.- Halla los puntos de la función $y=2x^3-3x^2+12x$, en los cuales la tangente es paralela a la recta $y=24x-10$. Sol: $-1, 2$

53.- Halla la ecuación de las rectas tangentes y normales a las curvas en los puntos que se indican:

a) $y=\arctg(x)$ en $x=1$ b) $y=\ln(x+2)$ en $x=-1$

Sol: a) $y=1/2 x+(\delta-2)/4$; $y=-2x+2+\delta/4$; b) $y=x-1$; $y=-x+1$

54.- La curva $y=ax^2+bx+c$ pasa por el punto $P(1,8)$, y tiene un mínimo en $x=(0,5)$. Halla la ecuación de la curva. Sol: $y=3x^2+5$

55.- Halla la ecuación de las rectas tangentes a las curvas:

a) $y=x^2 \cdot e^x$ en $x=1$ b) $y=\text{sen}^2 x$ en $x=\delta/4$

Sol: a) $y=3ex-2e$; b) $y=x-\delta/4+1/2$

56.- ¿En qué puntos del intervalo $(0,5)$ la tangente a la curva $y=\arctg(2x)$ es paralela a la recta $2x-17y+34=0$. Sol: $x=2$

57.- ¿En qué puntos de la curva $y=x^2-3$ la recta tangente forma un ángulo de 45° con la parte positiva del eje de abscisas?. Sol: $x=1/2$

58.- ¿Satisface la función $f(x)=x^2-2|x|$ las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo $[-$

1,1]? ¿Y la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $[-2,3]$?

Sol: No, No

59.- Indicar si las funciones f y g verifican las hipótesis del teorema del valor medio (de Lagrange) y, en caso afirmativo, encontrar los puntos intermedios cuya existencia asegura el teorema:

a) $f(x) = x^2 + 3^x$ en $[0,1]$. b) $g(x) = \arctg(x)$ en $[0, \frac{\pi}{4}]$

Sol: a) $x=1/2$; b) $x = \sqrt{\frac{\pi}{4}} - 1$

60.- La función $f(x) = x^3 - 13x + 2$ cumple el teorema de Rolle en el intervalo $[1,b]$. Cuál es el valor de b ? Hallar el punto intermedio cuya existencia asegura el teorema. Sol: $b = 3$; $x = \sqrt{\frac{13}{3}}$

61.- Halla la fórmula para la derivada n -ésima de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 \cdot e^x$; b) $f(x) = \ln(x+2)$; c) $f(x) = e^x + e^{-2x}$

Sol: a) $f^n(x) = (x^2 + 2nx + n^2 - n) \cdot e^x$; b) $f^n(x) = \frac{(-1)^{n+1} (n-1)!}{(x+2)^n}$;

c) $f^n(x) = e^x + (-1)^n 2^n e^{-2x}$

62.- Estudia si las siguientes funciones cumplen el teorema de Rolle en el intervalo que se indica. En caso afirmativo halla el punto en que se anula la derivada:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 - x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $[-2,3]$; b) $g(x) = \sqrt[3]{x}$ en $[-2,2]$

Sol: $f(x)$ Sí, $x=0$; $g(x)$ No

63.- Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 3x^2 + 2$ en su punto de inflexión. Sol: $y = -3x + 3$

64.- Hallar el valor de a para que la función $y = x^2 - ax + 2$ tenga un mínimo en $x=1$. Sol: $a=2$

65.- Hallar el valor de a para que la función $y = x^2 + 2x + a$ tenga un mínimo en $x=-1$. Sol: $a=0$

66.- Hallar a , b , c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un máximo en el punto $(0,1)$ y un mínimo en $(1,2)$. Sol: $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 1$

67.- Hallar b , c y d para que la función $x^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un extremo en $(2,0)$ y un punto de inflexión en $x=1$. Sol: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$